Universität Hamburg **Fachbereich Mathematik**
Vorlesung Kurven und Flächen **WS 2010/11 – F. Reidegeld**

Übungsblatt 6

(Abgabe 17.01.11 vor der Vorlesung)

1. a) Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, X und Y seien tangentiale Vektorfelder längs f und $c : I \to U$ sei eine Kurve. Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle X(c(t)), Y(c(t))\rangle \ .$$

Benutzen Sie ihr Ergebnis, um die folgenden Rechenregeln zu beweisen

$$\begin{aligned} D_Z\langle X, Y\rangle &= \langle D_Z X, Y\rangle + \langle X, D_Z Y\rangle \\ \nabla_Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

wobei Z ein weiteres tangentiales Vektorfeld ist.

b) Beweisen Sie eine der drei anderen Rechenregeln für ∇ aus der Vorlesung.

2. Es sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Weiterhin seien $X = \sum_{i=1}^2 X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ und $Y = \sum_{i=1}^2 Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ zwei beliebige tangentiale Vektorfelder längs f. Finden Sie einen Rechenausdruck für $\nabla_X Y$, welcher nur Ableitungen der Funktionen X^i und Y^i sowie die Christoffel-Symbole zweiter Art enthält.

Hinweis: Für Funktionen $g : U \to \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x^i}} g = \frac{\partial g}{\partial x^i} \ .$$

3. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit $c^1(t) > 0$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die zugehörige Rotationsfläche. Berechnen Sie alle 8 Christoffel-Symbole erster Art von f.

4. Zeigen Sie, wie man die Christoffel-Symbole zweiter Art mit Hilfe der Christoffel-Symbole erster Art berechnen kann. Geben Sie auch eine explizite Formel für Γ_{ij}^k an.