Übungsblatt 4

(Abgabe 6.12.10 vor der Vorlesung)

1. Es seien $f : U \to \mathbb{R}^3$ und $\widetilde{f} : V \to \mathbb{R}^3$ parametrisierte Flächenstücke und $\phi : V \to U$ eine Umparametrisierung. Weiterhin sei $v \in V$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Tangentialräume von f und $\widetilde{f}$ die folgende Beziehung zueinander haben:

$$T_v\widetilde{f} = T_{\phi(v)}f \; .$$

2. Sei I ein offenes Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $c^1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Die zu c gehörige Rotationsfläche ist durch

$$\begin{aligned} f &: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ f(x,y) &:= (c^1(x) \cdot \cos y, c^1(x) \cdot \sin y, c^2(x)) \end{aligned}$$

definiert.

   a) Zeigen Sie, dass f tatsächlich ein Flächenstück beschreibt.
   b) Berechnen Sie das Gaußsche Normalenfeld n von f.
   c) Berechnen Sie die erste Fundamentalform I von f.

3. Es seien $R > r > 0$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei die Kurve mit

$$c(t) := (R + r\ \cos t, r\ \sin t) \; .$$

Die zu c gehörige Rotationsfläche f ist der sogenannte (Rotations)torus.

   a) Bestimmen Sie den Tangentialraum des Torus an den Punkten p mit $p \in \{(R+r, 0, 0), (R, 0, r), (R-r, 0, 0)\}$.
   b) Zeigen Sie, dass für die ersten beiden p jeweils eine Seite der Ebene $\{p\} + T_pf$ existiert, die keine Punkte des Torus bzw. der Menge $f(\mathbb{R}^2)$ enthält. Zeigen Sie weiterhin, dass für $p = (R-r, 0, 0)$ auf beiden Seiten von $\{p\} + T_pf$ Punkte von $f(\mathbb{R}^2)$ existieren.

c) Bestimmen Sie die Menge $(\{p\} + T_p f) \cap f(\mathbb{R}^2)$ in den ersten beiden Fällen explizit und zeigen Sie, dass sie im dritten Fall unendlich viele Elemente hat.

4. Es sei U eine offene und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $g : U \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Bestimmen Sie die erste Fundamentalform des Graphen von g und zeigen Sie direkt, dass diese positiv definit ist.