Universität Hamburg **Fachbereich Mathematik**

Vorlesung Kurven und Flächen **WS 2010/11 – F. Reidegeld**

Übungsblatt 3

(Abgabe 22.11.10 vor der Vorlesung)

1. Sei $\lambda > 0$ beliebig. Die Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) := (e^{\lambda t} \cos t, e^{\lambda t} \sin t)$$

ist die sogenannte *logarithmische Spirale*. Berechnen Sie die Bogenlänge von c eingeschränkt auf das Intervall $(-\infty, t_0]$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$, den Winkel zwischen $c'(t)$ und $c(t)$ sowie die Krümmung von c.

2. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve. Zeigen Sie, dass $c(I)$ genau dann Teilmenge eines 2-dimensionalen affinen Unterraums von $\mathbb{R}^3$ ist, wenn die Torsion von c verschwindet.

3. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve und $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $e_i : I \to \mathbb{R}^n$ das begleitende Frenet-n-Bein. Weiterhin sei $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c mit $\widetilde{c} = c \circ \phi$. Das begleitende Frenet-n-Bein zu $\widetilde{c}$ sei $(\widetilde{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $\widetilde{e}_i : I \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen $\widetilde{e}_i = e_i \circ \phi$ gilt.

   Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion für i durch.

4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrixexponentialabbildung alle Frenet-Kurven im $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Krümmung und Torsion.

   Hinweis: Zeigen Sie hierfür, dass für beliebige Werte von $\kappa > 0$ und τ eine invertierbare 3×3-Matrix A und eine reelle Zahl a existieren, so dass

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   gilt.