Universität Hamburg **Fachbereich Mathematik**
Vorlesung Kurven und Flächen **WS 2010/11 – F. Reidegeld**

Übungsblatt 2

(Abgabe 8.11.10 vor der Vorlesung)

1. Beweisen Sie die folgende Aussage: Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$ und sei $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ eine bilineare Abbildung. Weiterhin sei I ein Intervall und $g : I \to \mathbb{R}^k$ sowie $h : I \to \mathbb{R}^l$ seien differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(g(t), h(t)) = F(g'(t), h(t)) + F(g(t), h'(t)) \, .$$

2. Beweisen Sie das folgende Lemma: Es seien $A \in SO(2)$, $v \in \mathbb{R}^2$ und $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve. Wir definieren eine Kurve $\widetilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ vermöge $\widetilde{c}(t) := A\, c(t) + v$. Die Krümmung von c im Punkt $c(t)$ und die Kümmung von $\widetilde{c}$ im Punkt $\widetilde{c}(t)$ stimmen überein.

   Hinweis: Jede Matrix aus $SO(2)$ lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   für ein $\theta \in \mathbb{R}$ schreiben.

3. Rechnen Sie nach, dass die Torsion τ einer Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}$$

   gegeben ist. Hierbei ist "$\times$" das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$.

4. Berechnen Sie die Krümmung und Torsion der Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $c(t) := (a\, \cos t, b\, \sin t, c\, t)$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $ab \neq 0$ seien.