4. Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (Vorlesungen 8 & 9)

Die *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre* ZF ist die erstufige Theorie über einem binären Relationssymbol ε bestehend aus den folgenden Axiomen (wobei wir führende Allquantoren zur besseren Lesbarkeit wie immer weglassen):

- Ext (**Extensionalitätsaxiom**):
$$((\forall z)((z \,\varepsilon\, x) \leftrightarrow (z \,\varepsilon\, y)) \rightarrow (x \equiv y))$$
Zwei Mengen sind (zusammen mit Axiom (g): genau dann) gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.
- Auss_φ (**Aussonderungsaxiom für Formel φ**):
$$(\exists y)(\forall z)((z \,\varepsilon\, y) \leftrightarrow ((z \,\varepsilon\, x) \wedge \varphi(z, y_1, \ldots, y_n)))$$
Es sei φ eine Formel mit freien Variablen $x, y_1, \ldots, y_n$. Dann ist für jede Menge x und alle Mengen $y_1, \ldots, y_n$ auch $\{z \,\varepsilon\, x \colon \varphi(z, y_1, \ldots, y_n)\}$ eine Menge, die wir mit y betzeichnen. Nach dem Extensionalitätsaxiom ist y eindeutig bestimmt.
  - Parameter sind wichtig, um beispielsweise $\{z \,\varepsilon\, x \colon t \,\varepsilon\, z\}$ zu erhalten (für einen festen Parameter t).
  - *Russell's Paradox:* Es gibt keine Menge, die alle Mengen enthält. Andernfalls könnte man mithilfe von (Auss) die Menge
  $$m = \{x \colon \neg(x \,\varepsilon\, x)\}$$
  bilden. Dann ist $(m \,\varepsilon\, m)$ genau dann wenn $\neg(m \,\varepsilon\, m)$, ein Widerspruch.
- Null (**Nullmengenaxiom**):
$$(\exists x)(\forall z)\neg(z \,\varepsilon\, x)$$
Es existiert eine Menge x, die keine andere Menge enthält.
  - Nach (Ext) ist diese Menge x eindeutig. Schreibe auch $\emptyset$ für die leere Menge. Formal erweitern wir unser Vokabular um ein nullstelliges Funktionssymbol $\emptyset$, und fügen das Axiom $(\forall z)\neg(z \,\varepsilon\, \emptyset)$ hinzu.
- Paar (**Paarmengenaxiom**):
$$(\exists z)(\forall w)((w \,\varepsilon\, z) \leftrightarrow ((w \equiv x) \vee (w \equiv y)))$$
Für je zwei Mengen x, y existiert eine Menge z, deren Elemente genau x und y sind.
  - Schreibe auch $\{x, y\}$ für diese nach Ext eindeutige Menge z. (Formal ist also $\{\cdot\}$ ein zweistelliges Funktionssymbol, welches zwei Mengen x, y auf die Menge $\{x, y\}$ abbildet.
  - Wir können nun auch *geordnete Paare* definieren: Für zwei Mengen x, y sei $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mithilfe der bisherigen Axiome beweist man
  $$ZF \vdash (\forall x, y, z, t)((\langle x, y\rangle \equiv \langle z, t\rangle) \leftrightarrow ((x \equiv z) \wedge (y \equiv t))).$$
  - Definiere ein einstelliges Prädikat 'ist ein geordnetes Paar' durch
  $$(x \text{ ist ein geordnetes Paar}) :\Leftrightarrow (\exists y, z)(x \equiv \langle y, z\rangle).$$
  - Definiere ein einstelliges Prädikat 'ist eine Funktion' durch[6]
  $$\begin{aligned}(f \text{ ist eine Funktion}) :\Leftrightarrow{} & (\forall x \,\varepsilon\, f)(x \text{ ist geordnetes Paar}) \wedge \\ & (\forall x, y, z)((((\langle x, y\rangle \,\varepsilon\, f) \wedge (\langle x, z\rangle \,\varepsilon\, f)) \rightarrow (y \equiv z)).\end{aligned}$$
  Dieses Prädikat macht natürlich nur Sinn, wenn wir Funktionen auch als Mengen auffassen. Das geht nach dem Potenzmengenaxiom, siehe unten.

[6]Wobei der *gebundene Quantor* $(\forall z \,\varepsilon\, x)p(z)$ bedeutet: $(\forall z)((z \,\varepsilon\, x) \rightarrow (p(z)))$. Ähnlich definiert man $(\exists z \,\varepsilon\, x)p(z)$ als $(\exists x)((z \,\varepsilon\, x) \wedge p(z))$.

- Definiere ein dreistelliges Prädikat 'ist eine Funktion von x nach y' durch

$$(f\colon x \to y) :\Leftrightarrow (f \text{ ist eine Funktion}) \wedge (\forall z)((z \,\varepsilon\, x) \leftrightarrow (\exists t)(\langle x, t\rangle \,\varepsilon\, f)) \wedge \\ (\forall z)((\exists t)(\langle t, z\rangle \,\varepsilon\, f) \to (z \,\varepsilon\, y)).$$

- Für eine Funktion $f\colon x \to y$ sei $f(t) \,\varepsilon\, y$ für $t \,\varepsilon\, x$ das eindeutige Element von y mit $\langle t, f(t)\rangle \,\varepsilon\, f$.

• Ver (**Vereinigungsaxiom**):

$$(\exists y)(\forall z)((z \in y) \leftrightarrow ((\exists w \,\varepsilon\, x)(z \,\varepsilon\, w)))$$

Für jede Menge x existiert eine Menge y mit $\bigcup x = y$. (Formal ist also $\bigcup$ ein einstelliges Funktionssymbol).
- Schreibe auch $x \cup y$ anstelle von $\bigcup\{x, y\}$.
- *Schnittmengen* existieren nach (Auss): Für eine nichtleere Menge x (bezeugt durch $y \,\varepsilon\, x$) sei

$$\bigcap x := \{t \in y\colon (\forall z \,\varepsilon\, x)(t \,\varepsilon\, z)\}.$$

- Schreibe auch $x \cap y$ anstelle von $\bigcap\{x, y\}$.
- Scheibe auch $x \setminus y := \{t \,\varepsilon\, x\colon \neg(t \,\varepsilon\, y)\}$, wiederum unter Benutzung von (Auss).

• Pot (**Potenzmengenaxiom**)

$$(\exists y)(\forall z)((z \,\varepsilon\, y) \leftrightarrow (\forall w \,\varepsilon\, z)(w \,\varepsilon\, x))$$

Für jede Menge x existiert eine (Potenz-)Menge $y = \mathcal{P}(x)$, deren Elemente gerade die Teilmengen von x sind. (Formal ist also $\mathcal{P}$ ein einstelliges Funktionssymbol).
- Wir benutzen in Zukunft die Abkürzung

$$z \subseteq x :\Leftrightarrow (\forall w \,\varepsilon\, z)(w \,\varepsilon\, x).$$

- Für zwei Mengen x, y können wir nun mit (Auss) das Kartesische Produkt $x \times y$ als Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ definieren: denn falls $t \,\varepsilon\, x$ und $u \,\varepsilon\, y$, so ist $\langle t, u\rangle = \{\{t\}, \{t, u\}\} \,\varepsilon\, \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$.
- Es bezeichne (nach (Auss))

$$y^x := \{f \,\varepsilon\, \mathcal{P}(x \times y)\colon (f\colon x \to y)\}$$

die Menge aller Funktionen von x nach y.

• Un (**Unendichkeitsaxiom**)

$$(\exists x)\big((\emptyset \,\varepsilon\, x) \wedge \big((\forall y \,\varepsilon\, x)\big(y^+ \,\varepsilon\, x\big)\big)\big)$$

wobei wir die Schreibweise y^+ für $y \cup \{y\}$ eingeführt haben. Die Menge y^+ heißt auch *Nachfolger von y*.
- Eine Menge, wie sie in (Un) gefordert wird, heißt auch *induktive Menge*. Nach (Auss) existiert dann auch eine kleinste induktive Menge, die wir mit ω bezeichnen (Eindeutigkeit folgt wie immer aus (Ext)).
- Für jede induktive Teilmenge $S \subseteq \omega$ gilt also $S = \omega$ (*Induktionsprinzip*).
- Die *(von Neumann) natürlichen Zahlen* sind $0 = \emptyset$ und $n + 1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$. Nachbereitung: $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

[**Abschweifung: Mengen und Klassen.** In der Praxis betrachtet man oft Mengen A_i indiziert durch eine Menge I, und man möchte die 'Menge' $\{A_i\colon i \in I\}$ betrachten. Aber ist das eine Menge? Dafür braucht's ein extra Axiom.

Idee: $x \mapsto \{x\}$ sieht aus wie eine Funktion, ist aber keine: Jede Funktion (ist eine Menge und) hat einen Definitionsbereich, der wiederum eine Menge sein muss. Aber die Klasse aller Mengen ist keine Menge nach Russell.

Definition 4.1 (Klasse)**.** Eine Familie von Mengen C heißt *definierbar mit Parametern* oder kurz eine *Klasse*, falls eine Formel $p(x, t_1, \ldots, t_n)$ mit Parametern $t_1, \ldots, t_n$ existiert, so dass für alle Mengen x gilt:

$$c \in C \Leftrightarrow ZF \vdash p(c, t_1, \ldots, t_n).$$

Manche Klassen sind selbst wieder Mengen, andere Klassen können hingegen niemals selbst Mengen sein (Russell's Paradox...). Solche Klassen werden auch *echte Klassen* genannt.

Definition 4.2 (Funktionsklasse)**.** Eine Funktionsklasse ist eine Klasse $F \subseteq V^2$ (definiert durch eine Formel $p(x, y, \vec{t})$ mit Parametern $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, sodass

$$ZF \vdash (\forall x, y, z)((p \wedge p[z/y]) \to (y \equiv z)).$$

Unser Beispiel $x \mapsto \{x\}$ von oben ist also eine (echte) Funktionsklasse. Nach dieser Vorbereitung können wir unserer restlichen Axiome beschreiben.]

- Ers_φ (**Ersetzungsaxiom für Formel** φ)

$$(\forall x, y_1, y_2)\big(((\varphi(x, y_1, t_1, \ldots, t_n) \wedge \varphi(x, y_2, t_1, \ldots, t_n)) \to (y_1 \equiv y_2)) \to (\forall t)(\exists u)(\forall y)((y \,\varepsilon\, u) \leftrightarrow ((\exists x \,\varepsilon\, t)\varphi(x, y, t_1, \ldots, t_n))\big).$$

  Es sei φ eine Formel mit freien Variablen $x, y, t_1, \ldots, t_n$, geschrieben $\varphi(x, y, t_1, \ldots, t_n)$. Falls für gegebene Parameter $t_1, \ldots, t_n$ die zweistellige Formel φ eine Funktionsklasse ist, so ist das Bild einer Menge t unter φ wiederum eine Menge u. Kurzum: *Das Bild einer Menge unter einer Funktionsklasse ist eine Menge.*
- Fund (**Fundierungsaxiom**)

$$(\neg(x \equiv \emptyset) \to (\exists y \,\varepsilon\, x)(x \cap y \equiv \emptyset))$$

  Unter der Annahme, dass alle Mengen unseres Universums durch Anwendung der ZF Axiome aus der leeren Menge gewonnen wurden, dann gibt es ein Element y von x was gewissenmaßen als frühestes der Elemente von x konstruiert wurde. Die Elemente dieses y's mussten dann noch früher konstruiert worden sein, können also nach Wahl von y nicht in x enthalten sein.

Die Gesamtheit der bisherigen Axiom (das sind schon unendlich viele Axiome wegen Auss und Ers) wird mit ZF bezeichnet. Das Auswahlaxiom ist hierbei noch nicht enthalten. Die Theorie, die man unter Zunahme des Auswahlaxioms erhält, nennt man ZFC (=ZF + AC).

- AC (**Auswahlaxiom**)

$$\big((f : x \to y) \wedge ((\forall t \,\varepsilon\, x)\neg(f(t) \equiv \emptyset))\big) \to \Big((\exists g)\Big(\Big(g : x \to \bigcup y\Big) \wedge (\forall t \,\varepsilon\, x)(g(x) \,\varepsilon\, f(x))\Big)\Big)$$

  Jede Familie nichtleerer Mengen (indiziert in unserer Formel durch die Funktion f) hat eine Auswahlfunktion (eine Funktion g, die aus jeder unserer Mengen genau ein Element aussucht).

4.1. **Modelle von ZF.** In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie Modelle von ZF aussehen können.

Eine Modell für ZF oder ZFC ist definiert wie in Kapitel 3—ein Modell der erststufigen Logik mit Vokabular $\{\varepsilon\}$ und Theorie T =ZF oder T =ZFC: eine “Menge”V mit einer Interpretation ε_V '$\subseteq V^2$. Um jedoch nicht durcheinander zu kommen mit den Mengen und Teilmengenbegriffen, bezeichnen wir jedes Modell V für ZF oder ZFC in Zukunft als *Universum.* Die Elemente von V nennen wir Mengen. Die Interpretation ε_V ist in obigen Sinne ist eine echte Klasse, gegeben durch die Formel $p(x) = (\exists y, z)((x = \langle y, z\rangle) \wedge (y \,\varepsilon\, z))$.

Definition 4.3. Eine Menge x heißt *transitiv*, wenn $\bigcup x \subseteq x$.

Lemma 4.4. *Für jede Menge x existiert eine transitive Menge y mit $x \subseteq y$.*[7]

Es ist leicht nachzurechnen, dass der Schnitt transitiver Mengen wieder transitiv ist. Sobald wir Lemma 4.4 bewiesen haben, wissen wir also, dass jedes x einer kleinsten transitiven Menge enthalten ist—diese bezeichnen wir auch mit $\mathrm{TC}(x)$ (für 'transitive closure').

Beweis. Wir wollen $y = x \cup (\bigcup x) \cup (\bigcup\bigcup x) \cup (\bigcup\bigcup\bigcup x) \cup \cdots$ wählen. Aber warum ist das eine Menge? (Präzise: Warum gibt es ein $y \in V$ mit $y = \cdots$?) Wir wenden das Vereinigungsmengenaxiom auf die Menge

$$z = \Big\{x, \Big(\bigcup x\Big), \Big(\bigcup\bigcup x\Big), \Big(\bigcup\bigcup\bigcup x\Big), \dots\Big\}$$

an, um y zu erhalten. Warum ist z eine Menge? Wir wenden das Ersetzungsaxiom an auf ω (existiert nach dem Unendlichkeitsaxiom) und die Funktionsklasse bestehend aus $\langle 0, x\rangle, \langle 1, \bigcup x\rangle, \langle 2, \bigcup\bigcup x\rangle, \dots$.

Warum ist das eine Funktionsklasse? Wir müssen eine Formel $p(a, b)$ finden, die das bezeugt. Definiere

$$(f \text{ ist eine endliche Approximation für } p) :\Leftrightarrow (\exists y)(\exists n \,\varepsilon\, \omega)$$
$$\Big((f\colon n \to y) \wedge (\langle 0, x\rangle \,\varepsilon\, f) \wedge (\forall m \,\varepsilon\, (n \setminus \{0\}))\Big(f(m) = \bigcup f(m-1)\Big)\Big).$$

Mithilfe des Induktionsprinzips für ω überprüft sieht man, dass (1) je zwei endliche Approximationen f und g für p übereinstimmen auf den Schnitt ihrer Definitionsbereiche, und dass (2) für jedes $n \in \omega$ eine Approximation existiert, die n in ihrem Definitionsbereich enthält. Nun betrachten wir

$$p(a, b) = (\exists f)\big((f \text{ endliche Approximation für } p) \wedge (\langle a, b\rangle \,\varepsilon\, f)\big).$$

Aus (1) und (2) folgt, dass p wirklich eine Funktionsklasse ist. □

Theorem 4.5 (Epsiloninduktion)**.** *Eine Klasse C, die mit allen Elementen einer Menge x auch immer x selbst enthält, ist die Allklasse.*[8]

Beweis. Angenommen, das Theorem wäre falsch für eine Klasse $C = \big\{x\colon p(\vec{t}, x)\big\}$. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $\neg p(x)$.

Betrachte $y = \{t \,\varepsilon\, \mathrm{TC}(x)\colon \neg p(t)\}$ (ist eine Menge nach Auss). Dann ist y nichtleer (denn andernfalls $p(x)$), und somit existiert nach dem Fundierungsaxiom ein $m \,\varepsilon\, y$ mit $m \cap y = \emptyset$. Somit gilt also $p(t)$ für alle $t \,\varepsilon\, m$ (hier benutzen wir Transitivität von $\mathrm{TC}(x)$), aber nicht $p(m)$, ein Widerspruch. □

Umgekehrt impliziert das Prinzip der Epsiloninduktion das Fundierungsaxiom (unter der Annahme, dass die übrigen Axiom weiterhin gelten). Hausaufgabe.

Theorem 4.6 (Epsilonrekursion)**.** *Es sei G eine Funktionsklasse definiert auf ganz V. Dann existiert eine eindeutige Funktionsklasse F, definiert auf ganz V, so dass für alle $x \in X$*

$$F(x) = G(F[x]),$$

[7]Diese Aussage ist eine umgangssprachliche Formulierung für:

$$ZF \vdash (\forall x)(\exists y)\Big((x \subseteq y) \wedge \Big(\bigcup y \subseteq y\Big)\Big),$$

was nach dem Vollständigkeitstheorem 3.22 gleichbedeutend ist mit:

Sei (V, ε_V) ein beliebiges Universum für ZF. Dann gilt $V \models p$.

Im Folgenden werden wir immer die zweite Variante wählen, und wir betrachten, ohne es genauer zu erwähnen, ein beliebiges Universum (V, ε).

[8]Formal: Für jede Formel p mit freien Variablen $t_1, \dots, t_n, x$ gilt

$$(\forall t_1, \dots, t_n, x)\big([(\forall x)((\forall y \,\varepsilon\, x) p(y) \to p(x))] \to (\forall x) p(x)\big).$$

wobei $F[x]$ die Menge $\{F(t)\colon t \varepsilon x\}$ ist (existiert nach Ersetzungsaxiom).

Beweis. **Existenz:** Wir sagen

$$(f \text{ ist eine Approximation für } F) :\Leftrightarrow (\exists x, y)\big((f\colon x \to y) \wedge (x \text{ ist transitiv}) \wedge (\forall t \varepsilon x)(f(t) \equiv G(f[t]))\big).$$

Wie oben zeigt man, dass je zwei endliche Approximationen f und g für F auf den Schnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, und dass für jedes x eine Approximation existiert, die x in ihrem Definitionsbereich enthält. Beweis diesmal über Epsiloninduktion statt normaler ω-Induktion.

Setze dann

$$F(a, b) = (\exists f)\big((f \text{ Approximation für } F) \wedge (\langle a, b\rangle \varepsilon f)\big).$$

Eindeutigkeit: Epsiloninduktion. □

Bemerkung: Welche Eigenschaften der Relation ε haben wir in den vorherigen Sätzen benutzt? Dass ε das Fundierungsaxiom erfüllt, und dass für jede Menge x, auch $\{y\colon y \varepsilon x\}$ eine Menge ist (um den transitiven Abschluss $\mathrm{TC}(x)$ zu formen). Also haben wir für jede binäre Relation $r \subseteq V^2$, die diese zwei Eigenschaften erfüllt, einen analogen Satz über r-Induktion und r-Rekursion beweisen.

Als Anwendung betrachten wir das folgende Theorem, was sagt, dass jede fundierte, extensionelle Relation auf einer Menge a auf genau eine Weise durch eine transitive Menge (b, ε) dargestellt wird.

Theorem 4.7 (Isomorphiesatz von Mostowski)**.** *Es sei r eine zweistellige Relation aus einer Menge a, die fundiert und extensionell ist. Dann existiert eine transitive Menge b und eine Bijektion $f\colon a \to b$, die ein Isomorphismus bezüglich r und ε ist.*

Beweis. **Existenz:** Definiere mithilfe von r-Rekursion eine Funktionsklasse

$$f(x) = \{f(y)\colon y\, r\, x\}.$$

Setze $b := f[a]$, eine Menge nach dem Ersetzungsaxiom. Es ist klar, dass $f\colon a \to b$, und dass f surjektiv nach b ist.

- b ist transitiv: Betrachte ein $t \varepsilon f(x) \varepsilon b$. Da $f(x) = \{f(y)\colon y\, r\, x\}$ nach Definition, gilt nach dem Extensionalitätsaxiom, dass $r \varepsilon \{f(y)\colon y\, r\, x\}$, also $r \varepsilon b$. Somit ist b transitiv.
- f ist injektiv: Wir beweisen mithilfe von r-Induktion, dass die Klasse

  $$C = \{x \varepsilon a\colon (\forall y \varepsilon a)((f(x) \equiv f(y)) \to (x \equiv y))\}$$

  schon ganz a ist. Betrachte $x \varepsilon a$ mit $t \varepsilon C$ für alle $t \varepsilon x$. Wir müssen zeigen, dass $x \varepsilon C$. Sei y beliebig mit $f(x) = f(y)$, also

  $$\{f(t)\colon t\, r\, x\} = f(x) = f(y) = \{f(s)\colon s\, r\, y\}.$$

  Da $t \varepsilon C$ folgt $\{t\colon t\, r\, x\} = \{s\colon s\, r\, y\}$, und somit $x = y$, da r extensionell ist.
- f ist Isomorphismus: Wir zeigen, dass $f(y) \varepsilon f(x)$ genau dann, wenn $y\, r\, x$. Die Rückrichtung ist klar nach Definition von f. Sei umgekehrt $f(y) \varepsilon f(x) = \{f(t)\colon t\, r\, x\}$. Dann ist $f(y) = f(t)$ nach dem Extensionalitätsaxiom, also $y = t$ wegen Injektivität, also $y\, r\, x$ wie behauptet.

Eindeutigkeit: Angenommen, $f'\colon a \to b'$ sei eine weitere solche Funktion. Dann ist

$$g = f' \circ f^{-1}\colon (b, \varepsilon) \to (b', \varepsilon)$$

ein ε-Isomorphismus. Mithilfe von Epsiloninduktion zeigt man nun $(\forall y \varepsilon b)(g(y) \equiv y)$. In der Tat, betrachte $y \varepsilon b$ und nimm an, dass $g(t) = t$ für alle $t \varepsilon y$. Dann $g(y) = \{g(t)\colon t \varepsilon y\} = \{t\colon t \varepsilon y\} = y$, wobei die erste Gleichheit gilt, da g ein Isomorphismus ist (und Ext). Die zweite Gleichheit folgt direkt aus Ext. □

4.2. **Vorschläge für die Nachbereitung zur Vorlesung.** Die folgenden Vorschläge könnten beim Nachbereiten des dritten Kapitels hilfreich sein.

Vorschlag 19. *Überzeugen Sie sich, dass die Umkehrung des Extensionalitätsaxiom ein Theorem der erststufigen Logik ist, also dass*

$$\vdash (\forall x, y)((x \equiv y) \rightarrow (\forall z)((z \,\varepsilon\, x) \leftrightarrow (z \,\varepsilon\, y)))$$

Vorschlag 20. *Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 4.4: Warum sind je zwei endliche Funktionen kompatibel, und warum gibt es für jedes $n \in \omega$ eine endliche Approximation, die n in ihrem Definitionsbereich entählt?*

Vorschlag 21. *Überzeugen Sie sich von der Eindeutigkeit der Funktionsklasse F in Theorem 4.6.*

Vorschlag 22. *Überzeugen Sie sich, dass r-Induktion und r-Rekursion funktioniert für zweistellige Relationen r, die das Fundierungsaxiom und die Eigenschaft, dass $\{y \colon y \, r \, x\}$ eine Menge ist für jede Menge x, erfüllen.*