EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE

MAX PITZ

Dieses Skript ist eine Ansammlung von Notizen, die hauptsächlich dem kurzen Text *Notes on Logic and Set Theory* von P.T. Johnstone folgen, [1].

Es ist ziemlich wahrscheinlich, dass dieser Text noch den einen oder anderen Tippfehler enthält. Wenn Sie einen Fehler finden, schreiben Sie mir unter max.pitz@uni-hamburg.de.

Ist diesem Skript ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

1. Universelle Algebra (Vorlesungen 1 & 2)

In diesem Kapitel abstrahieren wir Konzepte, die wir in ähnlicher Form in verschiedensten algebraischen Strukturen finden, wie Gruppen, Ringen oder Vektorräumen. In jedem dieser Fälle haben wir eine mathematische Struktur, die aus einer Menge besteht zusammen mit gewissen (Rechen-)Operationen. Des Weiteren haben wir für jede dieser Strukturen Axiome, die festlegen, wie verschiedene Rechenoperationen miteinander interagieren.

1.1. Terme und Strukturen.

Als Beispiel betrachten wir die Definition einer *Gruppe*. Eine Gruppe ist eine Menge G versehen mit

- einer zweistelligen/binären Funktion $m_G \colon G \times G \to G$ (Multiplikation)
- einer einstelligen Funktion $i_G \colon G \to G$ (Inversenbildung)
- einer nullstelligen[1] Funktion $e_G \colon G^0 \to G$ (neutrales Element)

welche für alle $x, y, z \in G$ den folgenden Gleichungen genügen:

- $m_G(x, m_G(y, z)) = m_G(m_G(x, y), z)$ (Assoziativgesetz)
- $m_G(e_G, x) = x$ (linksneutrales Element)
- $m_G(i_G(x), x) = e_G$ (Linksinverse)

Definition 1.1 (Funktionelles Vokabular). *Ein* funktionelles Vokabular *ist ein Paar* (Ω, α)*, wobei*

- Ω *eine Menge von* Funktionssymbolen *ist, und*
- $\alpha \colon \Omega \to \mathbb{N}$ *jedem Funktionssymbol seine* Stelligkeit *(oder auch:* Arität*) zuordnet.*

Wenn α aus dem Zusammenhang klar ist, sprechen wir einfach von einem funktionellen Vokabular Ω. Für Gruppen haben wir also ein funktionelles Vokabular (Ω, α) mit $\Omega = \{m, i, e\}$ und $\alpha(m) = 2$, $\alpha(i) = 1$ und $\alpha(e) = 0$.

Definition 1.2 (Ω-Struktur). *Eine* Ω-Struktur *für ein funktionelles Vokabular* Ω *ist eine Menge* A *zusammen mit Interpretationen* $\omega_A \colon A^{\alpha(\omega)} \to A$ *für jedes* $\omega \in \Omega$.

Manchmal bezeichnen wir auch die Familie $\{\omega_A \colon \omega \in \Omega\}$ *als* Ω*-Struktur für die Menge* A.

In der Struktur A interpretieren wir also jedes abstrakte Funktionssymbol ω als eine 'normale' Funktion $A^n \to A$ mit der vorgegebenen Stelligkeit $n = \alpha(\omega)$.

---

[1] Zu den nullstelligen Funktionen bemerken wir an dieser Stelle, dass nach Definition $A^B = \{f \colon B \to A \colon f \text{ ist eine Funktion}\}$, und somit $G^0 = \{\emptyset\}$ gilt, also wir e mit der Konstante $e(\emptyset) \in G$ identifizieren können. Also können wir uns 0-stellige Funktionen so vorstellen, dass sie ein ausgezeichnetes Element aus der Gruppe bezeichnen.

Definition 1.3 (Ω-Homomorphismus)**.** *Es sei Ω ein funktionelles Vokabular, und A, B seien Ω-Strukturen. Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt* Ω-Homomorphismus *falls*

$$f\big(\omega_A(a_1, \ldots, a_{\alpha(\omega)})\big) = \omega_B\big(f(a_1), \ldots, f(a_{\alpha(\omega)})\big)$$

für alle $\omega \in \Omega$ und $a_1, \ldots, a_{\alpha(\omega)} \in A$.

Jetzt wissen wir also was es mit dem Operationen einer Gruppe auf sich hat. Aber wie formalisieren wir die Axiome? Dazu betrachten wir nun *Terme*.

Es ist klar, dass Funktionen miteinander verkettet werden können. In einer Gruppe G können wir zum Beispiel ohne Probleme einen Ausdruck wie $m_G(x, m_G(y, z))$ für gegebene $x, y, z \in G$ auswerten. Eine solche wohldefinierte Aussage, also eine, die in jeder Ω-Struktur ausgewertet werden kann, bezeichnen wir als Term.

Definition 1.4 (Ω-Term)**.** *Es sei Ω ein funktionelles Vokabular, und X eine Menge von Variablen.*[2] *Wir definieren $F_\Omega(X) = FX$, die* Menge von Ω-Termen*, wie folgt:*

(a) $X \subset F_\Omega(X)$,
(b) wenn $\omega \in \Omega$, $\alpha(\omega) = n$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in F_\Omega(X)$, so ist auch $\omega t_1 t_2 \ldots t_n \in F_\Omega(X)$,
(c) das war's.

Eine solche *induktive* Definition ist sehr gebräuchlich in der mathematischen Logik. Gemeint ist, dass $F_\Omega(X)$ die kleinste Untermenge der Menge aller (endlichen) Zeichenfolgen in $X \cup \Omega$ ist, die unter (a) und (b) abgeschlossen ist. Man könnten also $F_\Omega(X)$ auch als den Schnitt definieren über alle solche Untermengen, die unter (a) und (b) abgeschlossen sind.

Wir sehen also, dass unserer Ausdruck von oben dem Term $mxmyz$ entspricht (wobei $\{x, y, z\} \subset X$ Variablen sind).

Bemerkung 1.5. *Der folgende Algorithmus gibt an, ob eine endliche Zeichenfolge von Elementen in $X \cup \Omega$ ein Term ist oder nicht: Man beginne am rechten Ende der Folge mit einer Zählvariable gesetzt auf 0. Gehe jeweils eine Stelle nach links, und erhöhe die Zählvariable um 1, wenn wir eine Variable passieren, und vermindere die Zählvariable um $(n-1)$, wenn wir ein n-stelliges Funktionssymbol passieren. Unsere Zeichenfolge ist ein Term, genau dann wenn die Zählvariable nach Start niemals unter 1 fällt, sowie bei 1 endet.*

Beispiel 1.6. *Wir betrachten die Zeichenfolge memmixyiz für das funktionale Vokabular $\Omega = \{m, i, e\}$ für Gruppen:*

Lösung. Der Algorithmus ergibt

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & m & & e & & m & & m & & i & & x & & y & & i & & z & \\ \hline 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & 3 & & 3 & & 2 & & 1 & & 1 & & 0 \end{array}$$

Es handelt sich also um einen Term. In Klammerschreibweise: $m[e, m(m[i(x), y], i(z))]$. □

Theorem 1.7 (Freie Ω-Strukturen)**.** *Es sei Ω ein funktionelles Vokabular. Dann*

(i) existiert eine Ω-Struktur auf der Menge $F_\Omega(X)$, und
(ii) $F_\Omega(X)$ ist die freie *Ω-Struktur erzeugt durch X, d.h. für jede andere Ω-Struktur A und beliebige Funktion $f\colon X \to A$ gibt es einen eindeutigen Ω-Homomorphismus $\overline{f}\colon F_\Omega(X) \to A$, welcher f fortsetzt.*

Beweis. (i) Dass $F_\Omega(X)$ eine Ω-Struktur ist, folgt sofort aus der Bedingung (b) für Terme. Es sei nämlich $\omega \in \Omega$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit $\alpha(\omega) = n$. Wir definieren eine Interpretation $\omega_{FX}\colon FX^n \to FX$ wie folgt: für $t_1, \ldots, t_n \in FX$ setze man

$$\omega_{FX}(t_1, \ldots, t_n) := \omega t_1 \ldots t_n \in FX.$$

(ii) Da FX induktiv definiert ist, werden wir auch die Fortsetzung von f auf FX induktiv definieren. Es sei $t \in FX$ ein Term.

[2] Wobei wir immer annehmen, dass $\Omega \cap X = \emptyset$.

- Falls $t = x$ eine Variabe ist, so setzen wir $\overline{f}(x) := f(x)$, und
- falls $t = \omega t_1 \dots t_n$, und $\overline{f}(t_i)$ definiert ist, so setzen wir $\overline{f}(t) := \omega_A\big(\overline{f}(t_1), \dots, \overline{f}(t_n)\big)$.

Es ist offensichtlich, dass $\overline{f}$ eine Fortsetzung von f ist. Außerdem ist der Definitionsbereich von $\overline{f}$ unter (a) und (b) abgeschlossen, und somit ist $\overline{f}$ definiert auf ganz FX.

Um zu sehen, dass $\overline{f}$ ein Ω-Homomorphismus ist, verifizieren wir die Eigenschaft aus Definition 1.3. Es gilt

$$\overline{f}(\omega_{FX}(t_1, \dots, t_n)) = \overline{f}(\omega t_1 \dots t_n) = \omega_A\big(\overline{f}(t_1), \dots, \overline{f}(t_n)\big),$$

wobei die erste Gleichheit aus der Definition von ω_{FX} folgt, und die zweite Gleichheit aus der Definition von $\overline{f}$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $f_1, f_2 \colon FX \to A$ zwei Ω-Homomorphismen, die beide f fortsetzen. Betrachte die Menge

$$F = \{t \in FX \colon f_1(t) = f_2(t)\}.$$

Nach Annahme gilt $X \subset F$. Und falls $\omega \in \Omega$ mit $\alpha(\omega) = n$, und $t_1, \dots t_n \in F$, so gilt

$$\begin{aligned} f_1(\omega t_1 \dots t_n) &= f_1(\omega_{FX}(t_1, \dots, t_n)) && \text{Def. von } \omega_{FX} \\ &= \omega_A(f_1(t_1), \dots, f_1(t_n)) && \Omega\text{-Homomorphismus} \\ &= \omega_A(f_2(t_1), \dots, f_2(t_n)) && t_i \in F \\ &= f_2(\omega_{FX}(t_1, \dots, t_n)) && \Omega\text{-Homomorphismus} \\ &= f_2(\omega t_1 \dots t_n) && \text{Def. von } \omega_{FX} \end{aligned}$$

also ist $wt_1 \dots t_2$ in F, i.e. F ist eine Teilmenge von FX, die unter (a) und (b) abgeschlossen ist. Es folgt $F = FX$, und somit $f_1 = f_2$. $\square$

Beobachtung: $F_\Omega X = \bigcup\{F_\Omega X' \colon X' \subset X \text{ endlich}\}$. Also können wir meistens unsere Diskussionen auf freie Strukturen in n Variablen beschränken. Im Folgenden sei also $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine n-elementige Menge.

Definition 1.8 (Interpretation von Termen in Ω-Strukturen)**.** *Es sei A eine Ω-Struktur. Für $t \in F_\Omega(X_n)$ definieren wir $t_A \colon A^n \to A$ induktiv wie folgt:*

- *falls $t = x_i$ (für $1 \leq i \leq n$), dann definiere t_A als die Projektion auf den i-ten Faktor von A^n (also $t_A(a_1, \dots, a_n) := a_i$),*
- *falls $t = \omega t_1 t_2 \dots t_m$ wobei $\alpha(\omega) = m$, dann sei $t_A = \omega_A((t_1)_A, \dots, (t_m)_A)$ (also $t_A(a_1, \dots, a_n) := \omega_A((t_1)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, (t_m)_A(a_1, \dots, a_n))$).*

Die Funktion t_A nennen wir auch die Interpretation der Terms t in A.

Insbesondere, falls $t = \omega x_1 \dots x_n$ (mit $\alpha(\omega) = n$), so haben wir $t_A = \omega_A$. Falls $t = \omega$ ein nullstelliges Funktionssymbol ist, so ist $t_A \colon A^n \to A$ die konstante Funktion mit Wert $\omega_A \in A$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass Ω-Homomorphismen mit Interpretation von Termen kommutieren (Nachbereitung).

1.2. **Theorien und Modelle.** Jetzt kehren wir zurück zu Gleichungen. Beim Assoziativgesetz für Gruppen besteht jede Seite aus einem ternären Term. Nennen wir die jeweiligen Terme $s = mxmyz$ und $t = mmxyz$, so entspricht die Aussage, dass das Assoziativgesetz in einer Gruppe G gilt, nunmehr die Aussage, dass die Interpretationen s_G und t_G gleich sind.

Wir sagen, dass für $s, t \in F_\Omega(X_n)$ ein Ausdruck der Form $(s \equiv t)$ eine n-stellige Gleichung (über dem funktionellen Vokabular Ω) ist. Wir sagen dass eine Gleichung $(s \equiv t)$ erfüllt ist in einer Ω-Struktur A, und schreiben $A \models (s \equiv t)$, falls $s_A = t_A$ (als Funktionen!) übereinstimmen.

[Aufgepasst: Jeder Term $t \in F_\Omega(X_n)$ ist auch ein Term in $F_\Omega(X_m)$ für alle $m \geq n$. Insofern können wir immer annehmen, dass wir genügend "unbenutzte"Variablen übrig haben, die wir eventuell für weitere Einsetzungen benötigen.]

Definition 1.9 (Algebraische Theorie)**.** *Eine* algebraische Theorie *ist ein Paar* $T = (\Omega, E)$ *wobei* Ω *ein funktionelles Vokabular ist und* E *eine Menge von Gleichungen über* Ω *ist.*

Definition 1.10 (Modell)**.** *Es sei* $T = (\Omega, E)$ *eine algebraische Theorie. Ein* T-Modell *ist eine* Ω*-Struktur* A*, in der alle Gleichungen aus* E *erfüllt sind.*

Eine Gruppe ist also genau ein (Ω, E)-Modell, wobei $\Omega = \{m, i, e\}$ wie zuvor, und

$$E = \{(mx_1mx_2x_3 \equiv mmx_1x_2x_3), (mex_1 \equiv x_1), (mix_1x_1 \equiv e)\}.$$

Genau wie wir eben Funktionssymbole zu Termen erweitert haben, erweitern wir nun die Menge der 'primitiven' Gleichungen E zur Menge der *abgeleiteten Gleichungen* $\tilde{E}$. Intuitiv sollen das alle Gleichheitssaussagen sein, die wir 'durch Einsetzen' beweisen können. Wie schon oben, werden wir eine induktive Definition von $\tilde{E}$ angeben.

Definition 1.11 (Abgeleitete Gleichungen einer algebraischen Theorie)**.** *Es sei* $T = (\Omega, E)$ *eine algebraischen Theorie. Die Menge der abgeleitete Gleichungen* $\tilde{E}$ *sei gegeben durch*

- *(a)* $E \subset \tilde{E}$,
- *(b)* $\tilde{E}$ *ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Terme, d.h.*
  - *(i) für jeden Term* t, $(t \equiv t) \in \tilde{E}$,
  - *(ii) wenn* $(s \equiv t) \in \tilde{E}$*, dann auch* $(t \equiv s) \in \tilde{E}$*, und*
  - *(iii) wenn* $(s \equiv t) \in \tilde{E}$ *und* $(t \equiv u) \in \tilde{E}$*, dann auch* $(s \equiv u) \in \tilde{E}$,
- *(c)* $\tilde{E}$ *ist abgeschlossen unter den folgenden zwei Einsetzungsverfahren:*
  - *(i) wenn* $(s \equiv t) \in \tilde{E}$ *und* x_i *ist eine Variable involviert in* s *und/oder* t*, und* u *ist ein beliebiger anderer Term, so ist auch* $(s[u/x_i] \equiv t[u/x_i]) \in \tilde{E}$*, wobei* $s[u/x_i]$ *den Effekt beschreibt, wenn man jedes Auftreten von* x_i *in* s *durch* u *ersetzt;*
  - *(ii) wenn* s *ein Term und* x_i *ist eine Variable involviert in* s *und* $(t \equiv u) \in \tilde{E}$*, so ist auch* $(s[t/x_i] \equiv s[u/x_i]) \in \tilde{E}$.
- *(d) das war's.*

Beispiel 1.12. *Wir 'beweisen', dass in Gruppen das Linksinverse automatisch auch rechtsinvers ist. Wir wollen also zeigen, dass* $(mxix \equiv e) \in \tilde{E}$.

Lösung. In einer Vorlesung über Gruppentheorie würden wir dies wie folgt beweisen:

$$x^{-1} = ex^{-1} = (x^{-1}x)x^{-1} = x^{-1}(xx^{-1})$$

und somit folgt

$$e = \left(x^{-1}\right)^{-1} x^{-1} = \left(x^{-1}\right)^{-1} \left(x^{-1}(xx^{-1})\right) = \left(\left(x^{-1}\right)^{-1} x^{-1}\right)(xx^{-1}) = e(xx^{-1}) = (xx^{-1}).$$

Jetzt wollen wir diesen Beweis umwandeln in eine formale Ableitung gemäß Definition 1.11. Als Annahmen ('Prämissen') haben wir gegeben

$$E = \{(mx_1mx_2x_3 \equiv mmx_1x_2x_3), (mex_1 \equiv x_1), (mix_1x_1 \equiv e)\} \subseteq \tilde{E}.$$

Wir schreiben nun unseren formalen Beweis als eine Serie von Gleichungen, so dass jede Zeile entweder eine Prämisse ist, oder aus einer vorherigen Zeile durch Anwendung einer der Axiome aus Definition 1.11 folgt.

1.	$(mex_1 \equiv x_1) \in \tilde{E}$	(Prämisse)
2.	$(x_1 \equiv mex_1) \in \tilde{E}$	(aus 1. und (b)(ii))
3.	$(ix_1 \equiv meix_1) \in \tilde{E}$	(aus 2. und (c)(i) mit $u = ix_1$)
4.	$(mix_1x_1 \equiv e) \in \tilde{E}$	(Prämisse)
5.	$(e \equiv mix_1x_1) \in \tilde{E}$	(aus 4. und (b)(ii))
6.	$(meix_1 \equiv mmix_1x_1ix_1) \in \tilde{E}$	(aus 5. mit (c)(ii) und $s = mx_2ix_1$)
7.	$(ix_1 \equiv mmix_1x_1ix_1) \in \tilde{E}$	(aus 3. und 6. mit (b)(iii))
8.	$(mx_1mx_2x_3 \equiv mmx_1x_2x_3) \in \tilde{E}$	(Prämisse)
9.	$(mmx_1x_2x_3 \equiv mx_1mx_2x_3) \in \tilde{E}$	(aus 8. und (b)(ii))
10.	$(mmix_1x_2x_3 \equiv mix_1mx_2x_3) \in \tilde{E}$	(aus 9. und (c)(i) mit $u = ix_1$)
11.	$(mmix_1x_1x_3 \equiv mix_1mx_1x_3) \in \tilde{E}$	(aus 10. und (c)(i) mit $u = x_1$)
12.	$(mmix_1x_1ix_1 \equiv mix_1mx_1ix_1) \in \tilde{E}$	(aus 11. und (c)(i) mit $u = ix_1$)
13.	$(ix_1 \equiv mix_1mx_1ix_1) \in \tilde{E}$	(aus 7. und 12. mit (b)(iii))

Somit haben wir einen formalen Beweis für unsere erste Kette von Gleichungen. Der restliche Beweis geht ähnlich (Nachbereitung). □

Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_E$ auf $F_\Omega(X)$ durch

$$s \sim_E t \Leftrightarrow (s \equiv t) \in \tilde{E}.$$

Aufgrund unserer Annahme (2) an $\tilde{E}$ ist es klar, dass $\sim_E$ wirklich eine Äquivalenzrelation ist. Es sei $F_{(\Omega,E)}(X)$ die Menge der Äquivalenzklassen von $F_\Omega(X)$ unter $\sim_E$.

Theorem 1.13. *(i) $F_{(\Omega,E)}(X)$ erbt die Ω-Struktur von $F_\Omega(X)$ und erfüllt die Gleichungen von E (in anderern Worten: $F_{(\Omega,E)}(X)$ ist ein (Ω, E)-Modell), und*

(ii) $F_{(\Omega,E)}(X)$ ist das freie (Ω, E)-Modell erzeugt durch X, d.h. für jede andere Ω-Modell A und beliebige Funktion $f\colon X \to A$ gibt es einen eindeutigen Ω-Homomorphismus $\tilde{f}\colon F_\Omega(X) \to A$, welcher f fortsetzt.

Beweis. (i) Hier müssen wir zeigen, dass die Interpretation eines Funktionssymbols unabhängig von den gewählten Vertretern ist. Wir definieren

$$\omega_{F_{(\Omega,E)}(X)}([t_1]_\sim, \ldots, [t_m]_\sim) := [\omega_{FX}(t_1, \ldots, t_m)]_\sim = [\omega t_1 \ldots t_m]_\sim$$

und müssen nun zeigen, dass diese Funktion wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. Dazu bemerken wir allgemein: *Ist ω ein m-stelliges Funktionssymbol und $(t_i \equiv s_i) \in \tilde{E}$ $(1 \le i \le m)$ so gilt $(\omega t_1 \ldots t_m \equiv \omega s_1 \ldots s_m) \in \tilde{E}$.*

Zum Beweis wähle Variablen $y_1, \ldots, y_m$, die nicht in t_i oder s_i vorkommen. Wir zeigen über Induktion nach k, dass $(\omega t_1 \ldots t_k y_{k+1} \ldots y_m \equiv \omega s_1 \ldots s_k y_{k+1} \ldots y_m) \in \tilde{E}$. Die Aussage gilt für $k = 0$ aufgrund von Axiom (b)(i), denn $\omega y_1 \ldots y_m$ ist ein Term. Und wenn die Aussage für k gilt, so folgt aus (c)(i) mit $[t_{k+1}/y_{k+1}]$ dass

$$(\omega t_1 \ldots t_k t_{k+1} y_{k+2} \ldots x_m \equiv \omega s_1 \ldots s_k t_{k+1} y_{k+2} \ldots x_m) \in \tilde{E},$$

(beachte, dass y_{k+1} wirklich nur einmal ersetzt wird) und ebenso folgt aus (c)(ii) mit Term $\omega s_1 \ldots s_k y_{k+1} \ldots y_m$ und $(t_{k+1} \equiv s_{k+1})$ dass

$$(\omega t_1 \ldots s_k t_{k+1} y_{k+2} \ldots y_m \equiv \omega s_1 \ldots s_k s_{k+1} y_{k+2} \ldots y_m) \in \tilde{E}.$$

Die Behauptung für $k + 1$ folgt nun aufgrund von Transitivität (b)(iii).

Jetzt müssen wir noch einsehen, dass $F_{(\Omega,E)}(X)$ alle Gleichungen in E erfüllt. Angenommen, $(s \equiv u) \in E \subset \tilde{E}$. Dann ist es aber nicht schwer zu zeigen, dass $s_{F_{(\Omega,E)}(X)} = t_{F_{(\Omega,E)}(X)}$ gleich sind als Funktionen, also dass für all Terme t_i $(1 \leq i \leq m)$ gilt

$$(st_1 \dots t_m \equiv ut_1 \dots t_m) \in \tilde{E}.$$

(Nachbereitung).

(ii) Es bezeichne $\hat{E}$ die Menge aller Gleichungen $(s \equiv t) \in \tilde{E}$, so dass $h(s) = h(t)$ gilt für alle Ω-Homomorphismen h von $F_\Omega X$ zu einem (Ω, E)-Modell A. Wir wollen zeigen, dass $\hat{E} = \tilde{E}$. Nach Definition von $\tilde{E}$ reicht es zu zeigen, dass $\hat{E}$ unter den Operationen (a), (b) und (c) abgeschlossen ist.

- Wir haben $E \subset \hat{E}$, denn wenn $(s \equiv t) \in E$, so haben wir $h(s) = s_A$ und $h(t) = t_A$, und es gilt $s_A = t_A$ da A ein (Ω, E)-Modell ist.
- Um zu sehen, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist, benutze dass 'Gleichheit von Funktionen' eine Äquivalenzrelation ist.
- Für (c)(i) nehmen wir an, dass $(s \equiv t) \in \hat{E}$. Wir müssen zeigen, dass auch $(s[u/x_i] \equiv t[u/x_i]) \in \hat{E}$, also dass $h(s[u/x_i]) = h(t[u/x_i])$ für alle Ω-Homomorphismen. Aber $h(s[u/x_i]) = h'(s)$, wobei h' den eindeutigen Homomorphismus bezeichnet, der x_i nach $h(u)$ sendet und die anderen Elemente von X zu ihrem Bild unter h sendet, vgl. Theorem 1.7. Dann ist aber $h(t[u/x_i]) = h'(t)$ aufgrund der Eindeutigkeit von h', und es gilt $h'(s) = h'(t)$, da $(s \equiv t) \in \hat{E}$.
- Für (c)(ii) nehmen wir an, dass $(t \equiv u) \in \hat{E}$. Wir müssen zeigen, dass $(s[t/x_i] \equiv s[u/x_i]) \in \hat{E}$, also dass $h(s[t/x_i]) = h(s[u/x_i])$ für jeden Ω-Homomorphismus. Wie zuvor ist $h(s[u/x_i]) = h'(s)$, wobei h' den eindeutigen Homomorphismus bezeichnet, der x_i nach $h(u)$ sendet und die anderen Elemente von X zu ihrem Bild unter h sendet; und $h(s[t/x_i]) = h''(s)$, wobei h'' den eindeutigen Homomorphismus bezeichnet, der x_i nach $h(t)$ sendet und die anderen Elemente von X zu ihrem Bild unter h sendet. Da aber $t_A = u_A$ gilt $h' = h''$.

Es folgt, dass jeder Ω-Homomophismus $h\colon F_\Omega(X) \to A$ konstant auf den Äquivalenzklassen von $\sim_E$ ist. Insbesondere ist der Ω-Homomorphismus $\overline{f}\colon F_\Omega(X) \to A$ aus Theorem 1.7 konstant auf den Äquivalenzklassen. Somit erhalten wir einem wohldefinierten Ω-Homormorphismus $\tilde{f}\colon F_{(\Omega,E)}(X) \to A$ durch $\tilde{f}([t]_\sim) := [\overline{f}(t)]_\sim$. Die Eindeutigkeit folgt aus Theorem 1.7. $\square$

Korollar 1.14. *Es sei (Ω, E) eine algebraische Theorie. Eine Gleichung $(s \equiv t)$ ist genau dann in $\tilde{E}$, wenn $(s \equiv t)$ erfüllt ist in jedem (Ω, E)-Modell.*

Beweis. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Gleichungen, die in einem (und somit jedem) (Ω, E)-Modell erfüllt sind, abgeschlossen unter (a),(b) und (c) sind.

Umgekehrt betrachte eine Gleichung $(s \equiv t)$, die in jedem (Ω, E)-Modell erfüllt ist. Es seien $x_1, \dots, x_n$ die Variablen, die in s und t involviert sind. Nach Annahme ist $(s \equiv t)$ auch in $F_{(E,\Omega)}(X_n)$ erfüllt, d.h.

$$s_{F_{(E,\Omega)}(X_n)}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) = t_{F_{(E,\Omega)}(X_n)}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim).$$

Nach Definition haben wir aber

$$s_{F_{(E,\Omega)}(X_n)}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) = [s_{FX_n}(x_1, \dots, x_n)]_\sim = [s]_\sim$$

und ebenso

$$t_{F_{(E,\Omega)}(X_n)}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) = [t_{FX_n}(x_1, \dots, x_n)]_\sim = [t]_\sim.$$

Somit folgt $[s]_\sim = [t]_\sim$, was gleichbedeutend ist mit $(s \equiv t) \in \tilde{E}$. $\square$

Dies ist somit das erst Vollständigkeitsresultat dieses Kurses: Die Aussagen (für algebraische Theorien), die *wahr sind* (also erfüllt sind in jedem Modell dieser Theorie), stimmen überein mit denjenigen Aussagen, die *beweisbar sind* (also ableitbar von primitiven Gleichungen durch einen vorgegebenen Ableitungsprozess, in unserem dem aus Def 1.11).

1.3. **Vorschläge für die Nachbereitung zur Vorlesung.** Die folgenden Vorschläge könnten beim Nachbereiten der ersten Vorlesung hilfreich sein.

Vorschlag 1. *Geben Sie funktionelles Vokabular und Gleichungen für (a) Ringe und (b) K-Vektorräume für einen gegebenen Köper K an (wählen Sie einstellige Operationen für jeden Skalar aus K).*

Vorschlag 2. *Es sei Ω das funktionelle Vokabular für Gruppen. Finden Sie zwei verschiedene Ω-Strukturen auf der Menge $A = \{0, 1, \ldots, 5\}$. Finden Sie zwei verschiedene Ω-Strukturen auf der Menge $B = \mathbb{N}$. Sind Ihre Strukturen Modelle für die Theorie der Gruppen?*

Vorschlag 3. *Es sei Ω das funktionelle Vokabular für Gruppen, und Ω' das funktionelle Vokabular für Vektorräume über einem festen Körper K. Vergewissern Sie sich, dass ein Gruppenmorphismen genau den Ω-Homomorphismem entsprechen, und dass lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen genau den Ω'-Homomorphismem entsprechen.*

Vorschlag 4. *Gegeben sei ein funktionales Vokabular $\Omega = \{t, b, u, c\}$ mit $\alpha(t) = 3$, $\alpha(b) = 2$, $\alpha(u) = 1$ und $\alpha(c) = 0$. Es seien x, y, z Variablen. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Ω-Terme?*

- *(i) ttxbucyzzz,*
- *(ii) xubytcz,*
- *(iii) tcucbucc,*
- *(iv) bbbxbybyybxbzbyyy,*
- *(v) bxytczuz,*
- *(vi) tbxxxxx.*

Für den Fall, dass es sich um einen Ω-Term handelt, schreiben Sie den Term in Klammerschreibweise.

Die folgenden Vorschläge könnten beim Nachbereiten der zweiten Vorlesung hilfreich sein.

Vorschlag 5. *Vergewissern Sie sich, dass Terme mit Ω-Homomorphismen kommutieren. Präzise: Es sei $f : A \to B$ ein Ω-Homomorphismus zwischen Ω-Strukturen A und B, und $t \in F_\Omega(X_n)$. Dann gilt für alle $a_1, \ldots a_n$, dass $f(t_A(a_1, \ldots, a_n)) = t_B(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.*

Vorschlag 6. *Vervollständigen Sie den formalen Beweis von Beispiel 1.12.*

Vorschlag 7. *Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem 1.13(i), d.h. zeigen Sie, dass $F_{\Omega,E}(X)$ die Gleichungen von E erfüllt.*

Vorschlag 8. *Verifizieren Sie, dass die Gleichungen, die in einem (und somit jedem) (Ω, E)-Modell erfüllt sind, abgeschlossen sind unter (a),(b) und (c).*