3. Erststufige Prädikatenlogik (Vorlesungen 5, 6 & 7)

3.1. **Motivation.** Bisher haben wir Universelle Algebra behandelt, in der wir Gleichungen formulieren konnten, aber keine Möglichkeiten hatten, solche Aussagen zu kombinieren. Und wir haben die Aussagenlogik behandelt, in der wir logische Verknüpfungen von Aussagen betrachtet haben, ohne diesen Aussagen eine spezifische Bedeutung zuzuweisen. In diesem Kapitel werden wir diese zwei Konzepte zusammenführen.

Beispiel 3.1. *Betrachte die folgende formale Aussage p über angeordnete Körper:*

$$\forall a \forall b \forall c (\exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c < 0) \wedge \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c > 0) \to \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c \equiv 0))$$

Diese Aussage besagt, dass jedes quadratisches Polynom, das sowohl positive wie negative Werte annimmt, eine Nullstelle hat. Die Struktur $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ erfüllt p, die Struktur $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}})$ aber nicht.

Manche Komponenten dieser Aussage p sind uns schon bekannt:

- die Symbole $\Omega = \{+, \cdot, 0, 1\}$ ist das funktionale Vokabular für Ringe mit 1,
- $a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c$ ist ein Ω-Term,
- $(a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c \equiv 0)$ ist eine 4-stellige Gleichung, und
- $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ sind logische Verknüpfungen.

Andere Bestandteile der Aussage sind neu:

- das Symbol $<$; hat in $(a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c < 0)$ eine ähnliche Rolle wie $\equiv$,
- die Symbole $\forall$ und $\exists$.

Im Folgenden wollen wir präzisieren, was diese neuen Symbole bedeuten.

3.2. **Definitionen.**

Definition 3.2 (Vokabular)**.** Eine *Vokabular* ist ein Tripel $\tau = (\Omega, \Pi, \alpha)$, wobei Ω und Π disjunkte Mengen sind, und $\alpha \colon \Omega \cup \Pi \to \mathbb{N}$ die *Stellenzahlfunktion* ist. Die Elemente aus Ω heißen (wie zuvor) *Funktionssymbole*, und die Elemente aus Π heißen *Relationssymbole*.

Im Prinzip könnte man also beide Paare $(\Omega, \alpha \restriction \Omega)$ und $(\Pi, \alpha \restriction \Pi)$ als funktionelle Vokabular auffassen—der Unterschied wird aber in den geplanten Interpretationen bestehen: während wir ein Funktionssymbol $\omega \in \Omega$ in einer Struktur A immer als Funktion $\omega_A \colon A^{\alpha(\omega)} \to A$ verstehen wollen, soll die Interpretation eines Relationssymbols $\phi \in \Pi$ immer eine Teilmenge $[\phi]_A \subset A^{\alpha(\phi)}$ sein. Das Symbol $<$ aus dem Beispiel fassen wir also als 2-stelliges Relationssymbol auf.

Definition 3.3 (Formeln)**.** Für ein Vokabular $\tau = (\Omega, \Pi, \alpha)$ definieren wir *Formeln* über τ wie folgt. Wir haben:

1. *Variablen* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ [Wir nehmen an, wir haben einen abzählbaren Vorrat an Variablen]
2. *Terme*, die wie zuvor induktiv definiert sind durch:
   (a) Jede Variable ist ein Term.
   (b) Wenn $\omega \in \Omega$, $\alpha(\omega) = n$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in F_\Omega(X)$, so ist auch $\omega t_1 t_2 \ldots t_n \in F_\Omega(X)$.
   (c) Das war's.
3. *Atomare Formeln*, von denen es zwei Arten gibt:
   (a) Falls s und t Terme sind, so ist $(s \equiv t)$ eine atomare Formel.
   (b) Wenn $\phi \in \Pi$, $\alpha(\phi) = n$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $\phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.
4. *Formeln*, die induktiv definiert sind durch:
   (a) Jede atomare Formel ist eine Formel.

(b) $\perp$ ist eine Formel; und falls p und q Formeln sind, dann ist auch $(p \to q)$ eine Formel. [Wie zuvor benutzen wir $\top$, $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$ und $(p \leftrightarrow q)$ als Kurzschreibweisen für die jeweiligen zusammengesetzten Formeln.]
(c) Falls p eine Formel ist, in der eine Variable x frei vorkommt [siehe unten], so ist $(\forall x)p$ eine Formel. [Wir benutzen $(\exists x)p$ als Kurzschreibweise für die Formel $\neg(\forall x)\neg p$.]
(d) Das war's.

Um eine Aussage der Form 'Alle Formeln p haben Eigenschaft Q' zu beweisen, reicht es also zu zeigen, dass die Formeln mit Eigenschaft Q unter (3) und (4) abgeschlosen sind. Einen solches Vorgehen nennen wir auch *Induktion nach dem Formelaufbau*.

Um Bedingung 4(c) zu erklären, benötigen wir das Konzept von *freien* und *gebundenen* Variablen in einer Formel.

Definition 3.4 (Freie Variablen)**.** Für eine Formel p (eine endliche Zeichenkette) definieren wir $\mathrm{var}(p)$ als die Menge der in p involvierten Variablen. Durch Induktion über den Formelaufbau definieren wir die Menge $\mathrm{fvar}(p)$ der *freien Variablen* von p wie folgt:

(a) Ist p atomar, so sei $\mathrm{fvar}(p) := \mathrm{var}(p)$.
(b) $\mathrm{fvar}(\perp) = \emptyset$ und $\mathrm{fvar}((q \to r)) := \mathrm{fvar}(q) \cup \mathrm{fvar}(r)$.
(c) $\mathrm{fvar}((\forall x)p) := \mathrm{fvar}(p) \setminus \{x\}$.

(Achtung: Es ist möglich, dass eine Variable in einer Formel sowohl frei als auch gebunden vorkommt (in der Praxis würden wir das aber durch geschickte Wahl der gebundenen Variablen vermeiden):

$$p(x) = ((x \cdot x \equiv 1) \to ((\forall x)(\forall y)(x \cdot y \equiv y \cdot x))).$$

Die Aussage $p(x)$ sagt also 'wenn x selbstinvers ist, dann ist die Struktur abelsch'. Die Variable x kommt frei in p vor; aber auch gebunden.)

Definition 3.5 (Aussage)**.** Eine Formel p heißt *Aussage*, falls sie keine freie Variablen hat.

Definition 3.6 (Universeller Abschluss)**.** Der *universelle Abschluss* einer Formel p ist die Formel $\overline{p}$ die man erhält, indem man für jede freie Variable x_i von p einen Quantor $(\forall x_i)$ vor die Formel p schreibt (in beliebiger Reihenfolge).

Definition 3.7 (τ-Struktur)**.** Es sei $\tau = (\Omega, \Pi)$ ein Vokabular. Eine τ-Struktur ist eine Menge A zusammen mit Interpretationen

- $\omega_A \colon A^{\alpha(\omega)} \to A$ für jedes $\omega \in \Omega$, und
- $\phi_A \subseteq A^{\alpha(\phi)}$ für jedes $\phi \in \Pi$.

Definition 3.8 (Interpretation von Formeln in τ-Strukturen)**.** Es sei $\tau = (\Omega, \Pi)$ ein Vokabular und A eine τ-Struktur. Für einen Term t mit $\mathrm{fvar}(t) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ definieren wir die Interpretation $t_A \colon A^n \to A$ wie in Definition 1.8. Und für jede Formel p mit $\mathrm{fvar}(p) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ definieren wir nun $p_A(n) \subset A^n$ induktiv über den Formelaufbau:[5]

(1) $(s \equiv t)_A := \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \colon s_A(a_1, \dots, a_n) = t_A(a_1, \dots, a_n)\}$,
(2) $\phi(t_1, \dots t_m)_A := \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \colon ((t_1)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, (t_m)_A(a_1, \dots, a_n)) \in \phi_A\}$,
(3) $\perp_A := \emptyset$ und $(p \to q)_A := p_A^{\complement} \cup q_A$, und
(4) $[(\forall x)p(x_1, \dots, x_n, x)]_A(n)$ sei definiert als die Menge

$$\{(a_1, \dots, a_n) \colon \text{für alle } a \in A \text{ gilt } (a_1, \dots, a_n, a) \in [p]_A(n+1)\}.$$

Definition 3.9. Es sei A eine τ-Struktur. Wir sagen, dass eine Formel p *erfüllt ist* in A (und schreiben $A \models p$), falls $p_A = A^n$.

Wir bemerken, dass $A \models p$ genau dann, wenn $A \models \overline{p}$ (Nachbereitung).

[5] Wobei n die Zahl der freien Variable in p bezeichnet.

Definition 3.10 (Theorie, Axiome, T-Modell)**.** Es sei τ ein Vokabular. Eine *Theorie* ist eine Menge an Aussagen. Die einzelnen Aussagen bezeichnen wir auch als *Axiome* der Theorie. Eine τ-Struktur A ist ein *Modell* für T, oder ein T*-Modell*, wenn $A \models p$ für alle $p \in T$.

3.3. **Beispiele erststufiger Theorien.** In den folgenden Beispielen sind zur besseren Lesbarkeit die führenden Allquantoren weggelassen.

Beispiel 3.11. *Gruppen. Neben der Möglichkeit, Gruppen mit einem funktionalen Vokabular* $\Omega = \{m, i, e\}$ *zu formalisieren (wie in Kapitel 1 geschehen), können wir auch* $\Omega = \{m\}$ *und* $\Pi = \emptyset$ *setzen, und die folgenden Axiome verwenden:*

$$p_1 = (mxmyz \equiv mmxyz)$$
$$p_2 = (\exists x)(\forall y)((mxy \equiv y) \wedge (myx \equiv y))$$
$$p_3 = ((\forall y)((mxy \equiv y) \wedge (myx \equiv y)) \rightarrow (\forall y)(\exists z)((myz = x) \wedge (mzy = x)))$$

Beispiel 3.12. *Dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte. Das Vokabular für linear Ordnungen ist* $\Omega = \emptyset$ *und* $\Pi = \{<\}$ *wobei* $<$ *ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die Axiome lauten*

$$p_1 = \neg(x < x)$$
$$p_2 = ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z))$$
$$p_3 = ((x < y) \vee (x \equiv y) \vee (y < x))$$
$$p_4 = ((x < y) \rightarrow (\exists z)((x < z) \wedge (z < y)))$$
$$p_5 = (\exists y)(y < x)$$
$$p_6 = (\exists y)(x < y)$$

Beispiele einer dichten lineare Ordnungen ohne Endpunkte sind $(\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ *und die Unterstrukturen* $(\mathbb{Q}, <_\mathbb{R})$*,* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, <_\mathbb{R})$ *oder* $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, <_\mathbb{R})$*.*

Beispiel 3.13. *Projektive Ebenen. Damit meinen wir ein System von 'Linien' und 'Punkten', sodass durch je zwei Punkte genau eine Linie geht, und je zwei Linien sich in genau einem Punkt schneiden. Hierzu wählen wir* $\Pi = \{\pi, \lambda, \in\}$ *wobei* π *('ist ein Punkt') und* λ *('ist eine Linie') beide einstellig sind, und* $\in$ *('liegt auf') zweistellig ist.*

$$p_1 = (\pi(x) \vee \lambda(x))$$
$$p_2 = \neg(\pi(x) \wedge \lambda(x))$$
$$p_3 = (\in(x, y) \rightarrow \pi(x) \wedge \lambda(y))$$
$$p_4 = ((\pi(x) \wedge \pi(y) \wedge \neg(x \equiv y) \rightarrow (\exists! z)(\in(x, z) \wedge \in(y, x)))$$
$$p_5 = ((\lambda(x) \wedge \lambda(y) \wedge \neg(x \equiv y) \rightarrow (\exists! z)(\in(x, z) \wedge \in(y, x)))$$

wobei wir in den letzten zwei Zeilen die Kurzschreibweise $(\exists! z)p(x, y, z)$ *eingeführt haben für*

$$(\exists z)(p(x, y, z) \wedge (\forall z')(p(x, y, z') \rightarrow (z' \equiv z))).$$

Wir werden in der zweiten Hälfte des Kurses sehen, dass auch die Mengentheorie eine erststufige Theorie ist—aber mehr dazu später. In den Hausaufgaben gibt es weitere Beispiele.

3.4. **Semantische und syntaktische Folgenrungsrelationen.** Wie im vorherigen Kapitel über die Aussagenlogik werden wir nun einen 'Wahrheitsbegriff' und einen 'Beweisbegriff' einführen, und dann zeigen, dass die beiden übereinstimmen: das ist Gödels Vollständigkeitssatz der erststufigen Prädikatenlogik.

Definition 3.14 (Semantisches Folgern)**.** Es sei T eine Theorie über dem Vokabular τ und p eine Formel. Wir sagen, dass p *semantisch aus* T *folgt* (geschrieben: $T \models t$), wenn für jedes T-Model A gilt, dass $A \models p$.

Definition 3.15 (Substitution von Variablen)**.** Ist p ein Formel, welche x als freie Variable enthält, und ist t ein Term, in dem keine gebundene Variable von p vorkommt, dann sei $p[t/x]$ für die Formel, die man aus p erhält, indem man jedes *freie* Vorkommen von x durch t ersetzt.

Betrachten wir die Formel 'x ist ein Quadrat', also $p(x) = (\exists y)(y \cdot y \equiv x)$. Wir können substituieren $p[e/x] = (\exists y)(myy \equiv e)$. Betrachte den Term $t = x + y$. Dann sollte $p[t/x]$ bedeuten '$x + y$ ist ein Quadrat'. Allerdings gilt

$$p[t/x](x) = (\exists y)(y \cdot y \equiv x + y),$$

die offenbar etwas anderes bedeutet als '$x + y$ ist ein Quadrat'. In der Praxis muss man also erst jede gebundene Variable in p durch eine neue Variable ersetzen, die nirgends sonst in t oder p vorkommt. Wir schreiben also $p(x) = (\exists z)(z \cdot z \equiv x)$, und jetzt können wir die Substitution $p[t/x]$ durchführen (und erhalten dann auch eine Formel mit zwei freien Variablen).

Jetzt erweitern wir unser Konzept eines formalen Beweises. Wie zuvor verwenden wir eine Reihe von Axiomen und zwei Ableitungsregeln.

(a) $(p \to (q \to p))$,
(b) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$,
(c) $(\neg\neg p \to p)$, (p, q und r beliebige Formeln),
(d) $(\forall x)p \to p[t/x]$ (p beliebige Formel, die x als freie Variable enthält, t beliebiger Term),
(e) $(\forall x)(p \to q) \to (p \to (\forall x)q)$ (x frei in q, nicht frei in p),
(f) $(\forall x)(x \equiv x)$,
(g) $(\forall x, y)((x \equiv y) \to (p \to p[y/x]))$ (x frei in p, y nicht gebunden in p).

Unsere Ableitungsregeln sind

(MP) Aus p und $(p \to q)$ dürfen wir q schließen (falls q eine freie Variable enthält, oder p eine Aussage ist).
(Gen) Aus p können wir $(\forall x)p$ schließen (sofern x nicht frei in einer Prämisse aus S vorkommt, die zum Beweis von p verwendet wurde).

[Bemerkungen zu den Einschränkungen: Da wir leere Mengen als Modelle zulassen wollen, müssen wir die Einschränkungen vornehmen, um nicht aus Versehen widersprüchliche Aussagen zu beweisen. Zum Beispiel haben wir $\emptyset \models \{(x \equiv x), ((x \equiv x) \to \bot)\}$, aber $\emptyset \not\models \bot$. Also dürfen wir in diesem Fall Modus Ponens nicht anwenden.]

Definition 3.16 (Formale Ableitung, Syntaktisches Folgern)**.** Es sei S eine Formelmenge und p eine Formel. Eine formale Ableitung von p aus S ist eine Folge von Aussagen $p_0, p_1, \ldots, p_n = p$, sodass jedes p_i

- ein Axiom ist, oder
- ein Element aus S ist, oder
- durch Anwendung des Modus Ponens oder Generalisierung aus früheren p_k erhalten wurde.

In diesem Fall sagen wir, dass p *syntaktisch aus S folgt*, und schreiben $S \vdash p$.

Beispiel 3.17. $\{(x \equiv y), (x \equiv z)\} \vdash (y \equiv z)$.

Lösung. Wir geben eine formale Ableitung an wie folgt:

1. $(\forall x, y)((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z)))$ (Axiom (g))
2. $((\forall x, y)((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z))))$
$\to ((\forall y)((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z))))$ (Axiom (d))

3.	$(\forall y)((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z)))$	(MP aus 1 & 2)
4.	$((\forall y)((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z))))$ $\to (((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z))))$	(Axiom (d))
5.	$((x \equiv y) \to ((x \equiv z) \to (y \equiv z)))$	(MP aus 3 & 4)
6.	$(x \equiv y)$	(Prämisse)
7.	$((x \equiv z) \to (y \equiv z))$	(MP aus 5 & 6)
8.	$(x \equiv z)$	(Prämisse)
9.	$(y \equiv z)$	(MP aus 7 & 8) $\square$

Wir sehen, dass Axiom (d) es insbesondere möglich macht, führende Allquantoren zu eliminieren (wie in Zeilen 1-5 des Beweises).

3.5. **Vollständigkeit.** In diesem Abschnitt skizzieren wir den Vollständigkeitssatz der erstufigen Prädikatenlogik. Der Beweis geht wie im Kapitel über die Aussagenlogik über den Korrektheitssatz und das Deduktionstheorem.

Theorem 3.18 (Korrektheitssatz / Soundness Theorem)**.** *Es sei T eine Theorie, und p eine Formel. Wenn $T \vdash p$, dann $T \models p$.*

Beweis. Beweis wie im Korrektheitssatz für die Aussagenlogik, Theorem 2.6: Überprüfe, dass jedes Axiom eine Tautologie ist, und dass unsere Ableitungsregeln korrekt sind. Details als Hausaufgabe. $\square$

Theorem 3.19 (Deduktionstheorem)**.** *Es sei S eine Formelmenge, und p, q weitere Formeln. Dann gilt $S \vdash (p \to q)$ genau dann, wenn $S \cup \{p\} \vdash q$.*

Beweis. Wie im alten Deduktionstheorem 2.7. Für die Rückrichtung müssen wir aber noch zusätzlich den Fall prüfen, in dem p_i durch eine Anwendung von (Gen) aus einem früheren p_j gewonnen wurde (also $p_i = (\forall x)p_j$ mit $S \vdash (p \to p_j)$ schon gezeigt).

Da wir aus (Gen) auf p_j anwenden durften, kommt x nicht frei in einer der Prämissen vor, die im Beweis von $S \cup \{p\} \vdash p_j$ verwendet wurden. Deswegen kommt X auch nicht frei vor in unserem bisherigen Beweis von $S \vdash (p \to p_j)$. Deswegen können wir (Gen) anwenden, und erhalten

$$S \vdash (\forall x)(p \to p_j).$$

Falls nun x nicht frei in p vorkommt (aber frei in p_j nach Annahme) folgt $S \vdash (p \to (\forall x)p_j)$ mit Axiom (e) und Modus Ponens. Und falls x frei in p vorkommt, dann können wir die Prämisse p nicht benutzt haben in unserem Beweis von $S \cup \{p\} \vdash p_i$ (da wir ja (Gen) angewandt haben). Also gilt $S \vdash p_i$, und somit $S \vdash (p \to p_i)$ mit Axiom (a) und Modus Ponens. $\square$

Definition 3.20 (Vollständigkeit einer Theorie)**.** Eine Theorie T ist *vollständig*, falls für jede Aussage p über τ entweder $T \vdash p$ oder $T \vdash \neg p$ gilt.

Definition 3.21 (Henkin Theorie)**.** Wir sagen eine Theorie T über Vokabular $\tau = (\Omega, \Pi)$ ist eine *Henkin Theorie*, wenn für alle Formeln $p(x)$ mit $T \vdash (\exists x)p$ ein nullstelliges Funktionssymbol $c_p \in \Omega$ existiert mit $T \vdash p[c_p/x]$. In diesem Fall nennen wir c_p aus einen *Zeugen* für die Existenzaussage $(\exists x)p$.

Nullstellige Funktionssymbole nennen wir auch *Konstanten.* Ein *geschlossener Term* ist ein Term, der keine Variablen enthält.

Theorem 3.22 (Vollständigkeitssatz der erststufigen Prädikatenlogik)**.** *Es sei T eine Theorie über dem Vokabular τ, und p eine Aussage. Dann gilt $T \models p$ genau dann, wenn $T \vdash p$.*

Beweis. Genau wie im letzten Kapitel reicht es zu zeigen, dass eine widerspruchsfreie Theorie ein Modell hat. Wie im vorherigen Kapitel werden wir wiederum unsere Theorie T zu einer maximal widerspruchsfreien Theorie erweitern—nur diesmal werden wir neben der Theorie auch unser Vokabular erweitern, und nach und nach Konstanten hinzufügen.

Behauptung. *Es existiert eine Theorie $\overline{T} \supset T$ über einem Vokabular $\overline{\tau} \supset \tau$, die widerspruchsfrei, vollständig und Henkin ist.*

Starte mit einer widerspruchsfreien Theorie $T = T_0$ über Vokabular $\tau = (\Omega, \Pi)$. Erweitere T_0 zu einer maximal widerspruchsfreien Theorie $\overline{T_0}$ wie in Lemma 2.8. Dann ist $\overline{T_0}$ vollständig.

Für jede Aussage $(\exists x)p(x) \in \overline{T_0}$ füge eine neue Konstante c zu unserem Vokabular hinzu, und fügen $p[c/x]$ zu $\overline{T_0}$ hinzu. Wir erhalten eine Theorie T_1 über $\tau_1 = (\Omega \cup C_1, \Pi)$, die Zeugen für $\overline{T_0}$ hat: Für jede Aussage $(\exists x)p(x) \in \overline{T_0}$ existiert $p[c/x] \in T_1$. T_1 ist dann immer noch widerspruchsfrei.

Details: Betrachte zuerst die Situation, in der wir nur eine einzige Konstante c_p zu τ, und das neue Axiom $p[c_p/x]$ zu $\overline{T_0}$ hinzugefügt haben. Nach dem Deduktionstheorem gilt

$$\overline{T_0} \cup \{p[c_p/x]\} \vdash \perp \quad \Leftrightarrow \quad \overline{T_0} \vdash \neg p[c_p/x].$$

Wenn wir im Beweis auf der rechten Seite jedes Vorkommen von c_p durch x ersetzen, so erhalten wir einen formalen Beweis von

$$\overline{T_0} \vdash \neg p.$$

Mit (Gen) folgt (dürfen wir anwenden, da $\overline{T_0}$ Theorie, und somit keine freien Variablen in unseren Prämissen vorkommen)

$$\overline{T_0} \vdash (\forall x)\neg p.$$

Aber da

$$\overline{T_0} \vdash (\exists x)p = \neg(\forall x)\neg p$$

erhalten wir

$$\overline{T_0} \vdash \perp,$$

ein Widerspruch. Somit können wir iterativ eine endliche Anzahl an Zeugen hinzufügen, ohne Widerspruchsfreiheit zu zerstören. Da Beweise endlich sind, ist somit auch T_1 widerspruchsfrei.

Im nächste Schritt, erweitere T_1 zu einer maximal widerspruchsfreien Theorie $\overline{T_1}$ über τ_1, und füge anschließend Konstanten hinzu, so dass wir eine widerspruchsfreie Theorie T_2 über $\tau_2 = (\Omega \cup C_1 \cup C_2, \Pi)$ erhalten, die Zeugen für $\overline{T_1}$ hat. Folge dieser Prozedur für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $\overline{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T_n}$ über dem Vokabular $\tau = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$. Dieses $\overline{T}$ genügt der Behauptung:

- $\overline{T}$ ist widerspruchsfrei: Wie in Lemma 2.8: Beweise sind endlich; somit werden nur endliche viele Präsmissen, und endlich viele Konstanten erwähnt. Also folgt die Widerspruchsfreiheit aus der Widerspruchsfreiheit der T_n's.
- $\overline{T}$ ist vollständig: Für jede Formel p über $\overline{\tau}$ gilt, dass p schon Formel über einem Vokabular τ_n ist. Also gilt $\overline{T_n} \vdash p$ oder $\overline{T_n} \vdash \neg p$.
- $\overline{T}$ ist Henkin: Gegeben eine Aussage $(\exists x)p(x) \in \overline{T}$, so ist $(\exists x)p(x) \in \overline{T_n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion existiert eine Konstante $c \in \tau_{n+1}$ mit $p[c/x] \in T_{n+1}$, also $p[c/x] \in \overline{T}$. Somit hat $\overline{T}$ Zeugen für die Existenzaussage $(\exists x)p(x)$.

Es ist klar, dass es nun ausreicht, ein Modell für $\overline{T}$ zu finden. Denn dieses Modell ist dann automatisch ein Modell für T. Dieses Modell für $\overline{T}$ bauen wir nun wieder auf den (geschlossenen) Termen, wie im Beweis von Theorem 1.13.

Auf der Menge der geschlossenen Terme von $\overline{\tau}$, definiere eine Äquivalenzrelation wie folgt: Terme $s \sim t$ seien genau dann äquivalent, wenn $\overline{T} \vdash (s \equiv t)$. Das ist in der Tat eine Äquivalenzrelation (Hausaufgabe, folgt aus Axiomen (f) und (g)). Es bezeichne A die Menge der Äquivalenzklassen. A wird durch die folgenden Interpretationen zu einer $\overline{\tau}$-Struktur:

- für $\omega \in \Omega$ der Stelligkeit m sei $\omega_A([t_1], \ldots, [t_m]) := [wt_1 \ldots t_m]$, und
- für $\phi \in \Pi$ der Stelligkeit m sei $\phi_A = \big\{([t_1], \ldots, [t_m]) \in A^m : \overline{T} \vdash \phi(t_1, \ldots, t_m)\big\}$.

Ähnlich wie im Beweis von Theorem 1.13 zeigt man, dass die Interpretationen wohldefiniert sind.

Details: Um die Wohldefiniertheit der Funktionssymbole einzusehen, müssen wir zeigen, dass wenn $\overline{T} \vdash (t_i \equiv r_i)$, dann auch $\overline{T} \vdash (\omega t_1 \cdots t_m \equiv \omega r_1 \dots r_m)$. Nach Axiom (g) mit $p = (\omega x x_2 \dots x_n \equiv \omega z x_2 \dots x_n)$, und anschließend (Gen) angewendet auf z, gilt

$$\vdash (\forall z)(\forall x)(\forall y)((x \equiv y) \to ((\omega x x_2 \dots x_n \equiv \omega z x_2 \dots x_n) \to (\omega y x_2 \dots x_n \equiv \omega z x_2 \dots x_n))).$$

Mit Axiom (d) mit $[x/z]$ und (MP) folgt

$$\vdash (\forall x)(\forall y)((x \equiv y) \to ((\omega x x_2 \dots x_n \equiv \omega x x_2 \dots x_n) \to (\omega y x_2 \dots x_n \equiv \omega x x_2 \dots x_n))).$$

Nun wenden wir Axiom (d) mit $[t_1/x]$, MP, Axiom (d) mit $[r_1/y]$ und MP an, und erhalten

$$((t_1 \equiv r_1) \to ((\omega t_1 x_2 \dots x_n \equiv \omega t_1 x_2 \dots x_n) \to (\omega r_1 x_2 \dots x_n \equiv \omega t_1 x_2 \dots x_n))).$$

Der erste Term ist eine Prämisse. Den zweiten Term erhält man leicht mit Axiom (f), Axiom (d) mit $[\omega t_1 x_2 \dots x_n/x]$ und MP. Also haben wir gezeigt, dass

$$\{(t_1 \equiv r_1)\} \vdash (\omega r_1 x_2 \dots x_n \equiv \omega t_1 x_2 \dots x_n).$$

Iterativ folgt $\{(t_i \equiv r_i) \colon i \leq m\} \vdash (\omega r_1 r_2 \dots r_n \equiv \omega t_1 t_2 \dots t_n)$ (Hausaufgabe). Die Wohldefiniertheit von Relationssymbolen ist ähnlich (Hausaufgabe).

Abschließend zeigt man die folgende Aussage $(*)$ für jede Formel p mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$

$$([t_1], \dots, [t_n]) \in p_A \text{ genau dann, wenn } \overline{T} \vdash p[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]. \qquad (*)$$

über eine Induktion nach dem Formelaufbau.

Aus $(*)$ folgt sofort, dass A ein $\overline{T}$-Modell ist: Denn wenn $\overline{T} \vdash p$ für eine Formel mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$, so folgt mithilfe von (Gen), dass $\overline{T} \vdash (\forall x_1)p$, also mithilfe von Axiom (d) und Modus Ponens, dass $\overline{T} \vdash p[t_1/x_1]$. Iterativ folgt (beachte, dass die t_i variablenfrei sind), dass $\overline{T} \vdash p[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$, also mit der Rückrichtung von $(*)$, dass $p_A = A^n$. Insbesondere gilt dies also für Formeln ohne freie Variablen, also auch für alles Axiome in $\overline{T}$. Somit ist A ein $\overline{T}$-Modell.

Details:
Atomare Formeln

- Fall $p = \bot$: Nach Definition ist $\bot_A = \emptyset$, und anscheinend gilt $([t_1], \dots, [t_n]) \in \emptyset$ genau dann, wenn $\overline{T} \vdash \bot$ (denn $\overline{T}$ ist widerspruchsfrei).
- Fall $p = (s \equiv t)$: Mit einer Induktion über den Termaufbau beweist man, dass

  $$s_A([r_1]_\sim, \dots, [r_n]_\sim) = [s[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]]_\sim.$$

  Ein beliebiges Tupel $([t_1], \dots, [t_n]) \in A^n$ liegt somit in $(s \equiv t)_A$ nach Definition 3.8 genau dann, wenn $[s[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]]_\sim = [r[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]]_\sim$, was aber nach Definition der Äquivalenzklassen genau dann gilt, wenn $\overline{T} \vdash p[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]$.
- Fall $p = \phi(t_1, \dots, t_m)$. Nach Definition 3.8 gilt

  $$p_A = \{([r_1]_\sim, \dots, [r_n]_\sim) \in A^n \colon (t_1[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n], \dots, t_m[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]) \in \phi_A\}.$$

  Nach Definition der Interpretation von Relationssymbolen gilt also $([r_1], \dots, [r_n]) \in p_A$ g.d.w. $\overline{T} \vdash \phi([t_1[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]]_\sim, \dots, [t_m[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]]_\sim)$, was dasselbe bedeutet wie $\overline{T} \vdash \phi(t_1, \dots, t_m)[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]$, was wiederum nichts anderes ist als $\overline{T} \vdash p[r_1, \dots, r_n/x_1, \dots, x_n]$.

Induktionsschritt

- Fall $(p \to q)$ und $(*)$ gilt für p und q: Dieser Fall geht wie in Kapitel 2.
- Wenn $p = (\forall x)q$, und $(*)$ gilt für q. Wenn $\overline{T} \vdash p[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$, so folgt mit Axiom (d) und MP, dass $\overline{T} \vdash q[t_1, \dots, t_{n+1}/x_1, \dots, x_{n+1}]$ für beliebigen geschlossenen Term t_{n+1}. Nach Induktionsannahme, also $([t_1], \dots, [t_{n+1}]) \in q_A$ für beliebiges $t_{n+1} \in A$, also $([t_1], \dots, [t_n]) \in p_A$ nach Definition 3.8.

  Umgekehrt, wenn $\overline{T} \not\vdash p[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$, dann $\overline{T} \vdash \neg p[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$ aufgrund der Vollständigkeit, also $\overline{T} \vdash (\exists x_{n+1})\neg q[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$, also gibt es, wegen Henkin, einen geschlossenen Term t_{n+1}, so dass $\overline{T} \vdash \neg q[t_1, \dots, t_{n+1}/x_1, \dots, x_{n+1}]$, d.h. $([t_1], \dots, [t_n]) \notin p_A$ nach Definition 3.8. □

3.6. **Typische Anwendugen des Vollständigkeitssatzes.**

Korollar 3.23 (Kompaktheitssatz). *Es sei T eine Theorie. Wenn jede endliche Teilmenge von T ein Modell hat, dann hat T ein Modell.*

Beweis. Klar für Widerspruchsfreiheit. □

Wir bemerken, dass es leider kein Äquivalent des Entscheidbarkeitsatz der Aussagenlogik gibt: es ist nicht so einfach, zu überprüfen, ob $T \models p$.

Können wir die Theorie der endlichen Gruppen axiomatisieren? In anderen Worten, gibt es eine Theorie T über dem Vokabular für Gruppen, so dass $G \models T$ genau dann, wenn G eine endliche Gruppe ist? Die Antwort ist nein:

Korollar 3.24. *Die Klasse der endlichen Gruppen ist nicht axiomatisierbar über dem Vokabular für Gruppen:*

Beweis. Angenommen, T axiomatisiert die endlichen Gruppen. Bilde eine Theorie T' indem wir zu T die Aussagen

$$(\exists x_1, x_2)(x_1 \not\equiv x_2)$$
$$(\exists x_1, x_2, x_3)((x_1 \not\equiv x_2) \wedge (x_1 \not\equiv x_3) \wedge (x_2 \not\equiv x_3))$$

und so weiter hinzufügen. Dann hat jede endliche Teilmenge von T' ein Model (sagen wir eine zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n$ für n groß genug), also hat T' ein Modell nach dem Kompakheitssatz. Dies ist aber nun notwenigerweise unendlich. □

Genereller haben wir gerade bewiesen:

Korollar 3.25. *Hat eine Theorie T beliebig große endliche Modelle, so hat T ein unendliches Modell.* □

Korollar 3.26 (Löwenheim-Skolem-Satz, aufwärts)**.** *Es sei T eine Theorie mit einem unendlichen Modell A. Dann hat T Modelle beliebig großer Kardinalität.*

Beweis. Füge zum Vokabular τ eine Familie von Konstanten $\{c_i : i \in I\}$ hinzu, mit $|I| > |A|$. Setze $T' = T \cup \{(c_i \not\equiv c_j) : i \neq j \in I\}$. Dann ist A ein Modell für jede endliche Teilmenge von T' (interpretiere neue Konstantensymbole durch verschiedene Elemente in A). Nach dem Kompaktheitssatz hat T' ein Modell, welches nun notwendigerweise Kardinalität $\geq |I|$ hat. □

Korollar 3.27 (Löwenheim-Skolem-Satz, abwärts)**.** *Es sei T eine Theorie über einem abzählbaren Vokabular mit einem unendlichen Modell A. Dann hat T eine abzählbares Modell.*

Beweis. Das konstruierte Modell aus Satz 3.22 ist abzählbar. □

3.7. **Peano Arithmetik.** Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen (1891):

(1) 0 ist eine natürliche Zahl,
(2) jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger,
(3) 0 ist kein Nachfolger,
(4) verschieden natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger, und
(5) wenn P eine Eigenschaft natürlicher Zahlen ist, die
   - für 0 gilt, und
   - wenn sie für eine natürliche Zahl n gilt, auch für den Nachfolger von n gilt,

   so gilt P für alle natürlichen Zahlen.

Im ersten Semester beweist man, dass jede Struktur, die den Axiomen (1)-(5) genügt, isomorph zu den natürlichen Zahlen ist. In unserer modernen Sprache sagen Axiome (1) und (2), dass wir ein nullstelliges Funktionssymbol 0, und ein einstellliges Funktionssymbol s haben. Axiome (3) und (4) können wir dann ausdrücken als

$$(\forall x)\neg(sx \equiv 0)$$

und

$$(\forall x, y)((sx \equiv sy) \rightarrow (x \equiv y)).$$

Das Axiom (5) können wir versuchen zu approximieren durch die folgenden Axiome

$$(\forall y_1, \ldots, y_n)((p[0/x] \wedge (\forall x)(p \rightarrow p[sx/x])) \rightarrow (\forall x)p) \qquad (*)$$

wobei p eine beliebige Formel ist mit $\mathrm{fvar}(p) = \{x, y_1, \ldots, y_n\}$ (wir haben also unendlich viele Axiome, jeweils eins für jede Formel p). Diese Theorie heißt *schwache Peano Arithmetik.*

Wenn Logiker von der *erststufigen Peano Arithmetik* (PA) sprechen, meinen sie die Theorie, bei der wir das funktionelle Vokabular um die zweistelligen Symbole a und m ('Addition' und 'Multiplikation') erweitern, und die folgenden Axiome hinzunehmen:

$$\begin{aligned}(\forall x)(ax0 \equiv x),\\ (\forall x, y)(axsy \equiv saxy),\\ (\forall x)(mx0 \equiv 0),\\ (\forall x, y)(mxsy \equiv amxyx).\end{aligned}$$

Diese Axiome entsprechen der üblichen rekursiven Definition von Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen (wir lassen natürlich auch in $(*)$ alle Formeln über dem erweiterten Vokabular zu). Diese Theorie ist sehr nützlich—aber sie ist trotzdem sehr viel schwächer, als die urprünglichen Peano-Axiome: Da unsere Sprache abzählbar ist, gibt es nach dem Löwenheim-Skolem Satz überabzählbare Modelle für PA. Es gibt also Strukturen, die PA erfüllen, aber nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen sind!

Auf ähnliche Weise kann man versuchen, auch die Theorie der vollständig angeordneten Körper als erststufige Theorie aufzufassen, wobei man das Vollständigkeitsaxiom ähnlich wie in $(*)$ gegen ein Axiomenschema austauscht. Modelle der erststufigen Theorie vollständig angeordneten Körper, die nicht isomorph zu $\mathbb{R}$ sind, heißen aus Nicht-Standard Modelle der Analyis.

Definition 3.28 (Kategorische Theorien)**.** Eine Theorie T heißt *kategorisch*, wenn es bis auf Isomorphie nur ein T-Modell gibt. Eine Theorie T heißt $|I|$-*kategorisch*, wenn es bis auf Isomorphie nur ein T-Modell der Mächtigkeit $|I|$ gibt.

Mit den Vorbemerkungen sehen wir also, dass PA nicht kategorisch ist. Allgemein sagt das der Löwenheim-Skolem-Satz, dass eine erststufige Theorie mit einem unendlichen Modell niemals kategorisch sein kann.

3.8. **Vorschläge für die Nachbereitung zur Vorlesung.** Die folgenden Vorschläge könnten beim Nachbereiten des dritten Kapitels hilfreich sein.

Vorschlag 14. *Warum gilt $A \models p$ genau dann, wenn $A \models \overline{p}$?*

Vorschlag 15. *Überzeugen Sie sich, dass es in der Definition des universellen Abschlusses wirklich nicht auf die Reihenfolge der führenden Allquantoren ankommt.*

Vorschlag 16. *Überzeugen Sie sich, dass es zum Beweis von Theorem 3.22 reicht, zu zeigen, dass jede konsistente Theorie ein Modell hat.*

Vorschlag 17. *Begründen Sie, warum wir in Theorem 3.22 ausgehend von einer widerspruchsfreiene Theorie nach Hinzufügen von Konstanten weiterhin widerspruchsfrei sind.*

Vorschlag 18. *Sind die Interpretationen der Funktions- und Relationssymbole in Theorem 3.22 wohldefiniert?*