5. Ordinalzahlen (Vorlesung 11)

5.1. Grundlegende Eigenschaften.

Definition 5.1 (Wohlordnung)**.** Eine lineare Ordnung $<$ auf einer Menge a heißt *Wohlordnung*, wenn jede nicht-leere Teilmenge $b \subseteq a$ ein bezüglich $<$ minimales Element hat.

Beispiele und Nicht-Beispiele:

- $(\mathbb{N}, <)$ ist eine Wohlordnung.
- $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ sind *keine* Wohlordnungen.
- $\{x \in \mathbb{Q} \colon x \geq 0\}$ ist *keine* Wohlordnung.
- $\left\{1 - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ ist eine zu $\mathbb{N}$ isomorphe Wohlordnung.
- $\left\{1 - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$ sowie $\left\{1 - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{2\}$ sind zueinander isomorphe Wohlordnungen.

Eine lineare Ordnung ist eine Wohlordnung, wenn es keine unendlich absteigenden Folgen gibt. Da Wohlordnungen fundiert und (wie jede lineare Ordnung) extensionell sind, erhalten wir als Konsequenz von Mostowskis Theorem:

Theorem 5.2. *Wenn $(a, <)$ eine wohlgeordnete Menge ist, so existiert eine eindeutige transitive Menge b und eine eindeutige Funktion $f \colon a \to b$, sodass $f \colon (a, <) \to (b, \varepsilon)$ ein Isomorphismus ist.*

Definition 5.3 (Ordinalzahl)**.** Eine (von Neumann) *Ordinalzahl* ist eine transitive Menge, die durch ε wohlgeordnet ($\Leftrightarrow$ linear geordnet—Hausaufgabe) ist.

Ordinalzahlen sind also genau die Mostowski-Bilder von wohlgeordneten Mengen—sie formen somit kanonische, paarweise nicht-isomorphe Vertreter der Gesamtheit aller Wohlordnungen. Ordinalzahlen werden meistens durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet. Die zu einer wohlgeordneten Menge $(a, <)$ eindeutig bestimmte isomorphe Ordinalzahl wird auch der *Ordnungstyp* von $(a, <)$ genannt. Die Klasse aller Ordinalzahlen bezeichnet man mit ON.

Beispiele:

- $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.
- Jede (von Neumann) natürliche Zahl n ist eine Ordinalzahl. Dies ist Spezialfall von:
- *Ist α eine Ordinalzahl, so ist auch $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ wieder eine Ordinalzahl.* Wir müssen überprüfen, dass α^+ transitiv ist, und dass es durch ε linear geordnet ist. Wenn $x \,\varepsilon\, y \,\varepsilon\, \alpha^+$ so ist entweder $y \,\varepsilon\, \alpha$ oder $y = \alpha$. In jedem Fall ist $x \,\varepsilon\, \alpha \subseteq \alpha^+$, und somit ist Transitivät gezeigt. Lineare Ordnung ist ähnlich leicht (das Element $\alpha \,\varepsilon\, \alpha^+$ ist das neue größte Element von α^+).
- Die Menge ω ist auch eine Ordinalzahl, wie man leicht direkt überprüfen kann.
- Dann ist auch die Menge ω^+ eine Ordinalzahl. Man kann sie sich als den Ordnungstyp von $\left\{1 - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$ veranschaulichen.

Theorem 5.4. *Die Vereinigung einer Menge von Ordinalzahlen ist eine Ordinalzahl.*

Beweis. Wir sammeln zuerst ein paar nützliche Behauptungen über Ordinalzahlen.

Behauptung 5.5. *Jedes Element einer Ordinalzahl ist selbst wieder eine Ordinalzahl.*

Es sei α eine Ordinalzahl und $\beta \in \alpha$. Da α transitiv ist, gilt $\beta \subseteq \alpha$, und somit ist auch β linear geordnet. Es bleibt zu zeigen, dass β auch transitiv ist. Sei also $\delta \,\varepsilon\, \gamma \,\varepsilon\, \beta$. Dann sind $\delta, \beta \,\varepsilon\, \alpha$, und somit gilt entweder $\delta \,\varepsilon\, \beta$, $\delta = \beta$ oder $\beta \,\varepsilon\, \delta$ (da α linear geordnet ist). Die letzten zwei Situation stehen allerdings im Widerspruch zum Fundierungsaxiom.

Behauptung 5.6. *Für Ordinalzahlen α und β mit $\alpha \not\subseteq \beta$ ist $\alpha \cap \beta \,\varepsilon\, \alpha$.*

Es sei γ das ε-minimale Element von $\alpha \setminus \beta$. Wir zeigen $\gamma = \alpha \cap \beta$ mithilfe des Extensionalitätsaxioms. Für $\delta \,\varepsilon\, \alpha \cap \beta$ gilt entweder $\gamma \,\varepsilon\, \delta$, $\gamma = \delta$ oder $\delta \,\varepsilon\, \gamma$. Die ersten zwei Möglichkeiten würden jedoch $\gamma \varepsilon \beta$ implizieren, ein Widerspruch zur Wahl von γ. Also gilt $\delta \varepsilon \gamma$, und somit ist $\supseteq$ gezeigt. Sei umgekehrt $\delta \varepsilon \gamma$. Wegen Transitivität von α gilt $\delta \in \alpha$. Und $\delta \notin \beta$ würde der Minimalität von γ widersprechen.

Behauptung 5.7. *Für Ordinalzahlen α und β gilt entweder $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$.*

Denn falls $\alpha \not\subseteq \beta$, so $\alpha \cap \beta \varepsilon \alpha$ nach vorstehender Behauptung, und falls $\beta \not\subseteq \alpha$, so gilt analog $\alpha \cap \beta \varepsilon \beta$. Falls also die Behauptung nicht gilt, erhielten wir $\alpha \cap \beta \varepsilon \alpha \cap \beta$, im Widerspruch zum Fundierungsaxiom.

Behauptung 5.8.
1. *Für Ordinalzahlen α und β ist $\alpha \subseteq \beta$ equivalent zu ($\alpha = \beta$ oder $\alpha \varepsilon \beta$).*
2. *Für Ordinalzahlen α und β gilt entweder $\alpha \varepsilon \beta$, $\alpha = \beta$ oder $\beta \varepsilon \alpha$.*
3. *Wenn a eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen ist, dass ist $\bigcap a$ wieder eine Ordinalzahl, und $\bigcap a$ ist das ε-minimale Element von a.*

(1) Wenn $\alpha \subseteq \beta$, so gilt entweder $\alpha = \beta$, oder $\beta \not\subseteq \alpha$. Im zweiten Fall folgt aus Behauptung 5.6, dass $\alpha = \alpha \cap \beta \varepsilon \beta$. Die Umkehrung folgt direkt aus der Transitivität von β.

(2) folgt aus (1) und Behauptung 5.7.

(3) Nach dem Fundierungsaxiom enthält a ein ε-minimales Element m, welches nach (2) sogar ein ε-kleinstes Element ist. Dieses Element m erfüllt die rechte Seite von (1), und somit gilt $m \subseteq \bigcap a$. Da $m \varepsilon a$, haben wir sogar Gleichheit.

Um den Beweis des Theorems abzuschließen, reichen nunmehr die folgenden Beobachtungen. Wenn a eine Menge von Ordinalzahlen ist, so ist $\bigcup a$ als Vereinigung transitiver Mengen selbst wieder transitiv. Alle Elemente von $\bigcup a$ sind selbst wieder Ordinalzahlen nach Behauptung 5.5. Also ist $\bigcup a$ linear geordnet durch ε nach Behauptung 5.8(2). $\square$

Die Klasse ON ist insbesondere transitiv (Behauptung 5.5) und linear geordnet (Bemerkung 5.8(2)), also erfüllt sie alle Eigenschaften einer Ordinalzahl, abgesehen davon, dass ON selbst keine Menge ist.

5.2. **Transfinite Induktion und Rekursion.** Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass ON die kleinste Klasse ist, die 0 enthält, und abgeschlossen und der Nachfolger- und Vereinigungsoperation ist.

Definition 5.9. Eine Ordinalzahl α heißt *Nachfolger*, falls α ein ε-größtes Element hat. Andernfalls heißt α ein Limes.

Wenn α ein Nachfolger ist, hat sie ein größtes Element β. Dann gilt für alle $\gamma \varepsilon \alpha$, dass entweder $\gamma = \beta$ oder $\gamma \varepsilon \beta$, also haben wir $\alpha = \beta^+$. Ist α ein Limes, so gilt $\bigcup \alpha = \alpha$. [Nach dieser Definition ist 0 ein Limes – manchmal ist das unpraktisch, und wir behandeln 0 separat.]

Theorem 5.10. *Es sei M eine Klasse, welche*

$$(\forall x)\big((x \in M) \to (x^+ \in M)\big) \quad \textit{sowie} \quad (\forall y)\Big((y \subseteq M) \to \Big(\bigcup y \,\varepsilon\, M\Big)\Big)$$

erfüllt. Dann enthält M jede Ordinalzahl, also $\mathrm{ON} \subseteq M$.

Beweis. Wir zeigen $(\forall\alpha)((\alpha \in \mathrm{ON}) \to (\alpha \in M))$ mithilfe von ε-Induktion.

Es sei α eine Ordinalzahl, sodass für alle $\beta \varepsilon \alpha$ die Induktionsannahme $((\beta \in \mathrm{ON}) \to (\beta \in M))$ erfüllt ist. Da alle $\beta \varepsilon \alpha$ selbst wieder Ordinalzahlen sind nach Behauptung 5.5, gilt $\beta \in M$ für alle $\beta \varepsilon \alpha$. Nun ist α selbst entweder ein Nachfolger oder ein Limes, also entweder $\alpha = \beta^+ \in M$ für ein $\beta \varepsilon \alpha$ oder $\alpha = \bigcup \alpha \in M$, da M unter diesen Operationen abgeschlossen ist. $\square$

Wenn man also ein Aussage für alle Ordinalzahlen beweisen will, oder vielleicht eine Funktionsklasse für alle Ordinalzahlen definieren will, reicht es also anzugeben, was man für Nachfolger und für Limeszahlen machen will. Dieses Vorgehen wird auch als *transfinite Induktion/Rekursion* bezeichnet. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Induktion ist also der Limesschritt neu hinzugekommen.

Im Folgenden wollen wir als Beispiel die Ordinalzahlarithmetik betrachten, also Addition ($\oplus$) und Multiplikation ($\odot$) von Ordinalzahlen. Diese können wir entweder über transfinite Rekursion definieren, oder wir können $\alpha \oplus \beta$ und $\alpha \odot \beta$ als direkt als den Ordungstyp geeigneter wohlgeordneter Mengen angeben.

Definition 5.11 (Ordinalsumme und -produkt)**.** Die *Ordinalsumme* $\alpha \oplus \beta$ ist definiert über transfinite Rekursion (mit Parameter α) als

$$\alpha \oplus \beta = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \beta = 0, \\ (\alpha \oplus \gamma)^+ & \text{falls } \beta = \gamma^+ \text{ ein Nachfolger ist,} \\ \bigcup \{\alpha \oplus \gamma \colon \gamma < \beta\} & \text{falls } \beta \text{ ein Limes verschieden von 0 ist.} \end{cases}$$

Das *Ordinalprodukt* $\alpha \odot \beta$ ist definiert über transfinite Rekursion (mit Parameter α) als

$$\alpha \odot \beta = \begin{cases} 0 & \text{falls } \beta = 0, \\ (\alpha \odot \gamma) \oplus \alpha & \text{falls } \beta = \gamma^+ \text{ ein Nachfolger ist,} \\ \bigcup \{\alpha \odot \gamma \colon \gamma < \beta\} & \text{falls } \beta \text{ ein Limes verschieden von 0 ist.} \end{cases}$$

Alternativ können wir uns Ordinalsumme und -produkt folgendermaßen vorstellen. Für lineare Ordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ ist die lexikographische Ordnung $<_\ell$ auf $A \times B$ ist definiert als

$$(a_1, b_1) <_\ell (a_2, b_2) :\Leftrightarrow (a_1 < a_2) \vee ((a_1 = a_2) \wedge (b_1 < b_2)).$$

Es ist leicht einzusehen, dass wenn $(A, <)$ und $(B, <)$ Wohlordnungen sind, so ist auch die lexikographische Ordnung auf $A \times B$ eine Wohlordnung.

Lemma 5.12. *$\alpha \oplus \beta$ ist isomorph zu $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ (mit der lexikographischen Ordnung), und $\alpha \odot \beta$ ist isomorph $\beta \times \alpha$ (mit der lexikographischen Ordnung).*

Beweis. Wir beweisen mit transfiniter Induktion nach β die folgende stärkere Aussage, nämlich dass für jede Ordinalzahl β Isomorphismen

$$f_\beta \colon \alpha \oplus \beta \to (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \quad \text{und} \quad g_\beta \colon \alpha \odot \beta \to \beta \times \alpha$$

existieren mit

$$f_\beta \restriction \gamma = f_\gamma \quad \text{und} \quad g_\beta \restriction \gamma = g_\gamma \qquad (\star)$$

für alle $\gamma < \beta \in \mathrm{ON}$.[9]

Ordinalsumme.

- Induktionsbeginn: Für $\beta = 0$ gilt
$$\alpha \oplus \beta = \alpha \cong \{0\} \times \alpha = (\{0\} \times \alpha) \cup \emptyset = (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta).$$
- Nachfolgerfall. Angenommen, es existiert $f_\beta \colon \alpha \oplus \beta \to (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$.

  Nach Definition ist $\alpha \oplus \beta^+ = (\alpha \oplus \beta)^+ = (\alpha \oplus \beta) \cup \{\alpha \oplus \beta\}$, und diese Wohlordnung ist isomorph zu $\alpha \oplus \beta$, gefolgt von dem neuen maximalen Element $m_1 = \alpha \oplus \beta$. Und $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta^+) = (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \cup (\{1\} \times \{\beta\})$ ist isomorph zu $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ gefolgt von einem neuen maximalen Element $m_2 = \langle 1, \beta \rangle$.

  Dann ist aber
$$f_{\beta^+} = f_\beta \cup \langle m_1, m_2 \rangle \colon \alpha \oplus \beta^+ \to (\{0\} \times \alpha) \cup \big(\{1\} \times \beta^+\big)$$
  ein Isomorphismus, der f_β fortsetzt, also $(\star)$ erfüllt.

[9] Man kann aus der Eindeutigkeit der Mostowski Funktion auch direkt folgern, dass die Eigenschaft $(\star)$ automatisch erfüllt ist.

- Limesfall. Es sei β ein Limes, so dass Isomorphismen f_γ existieren für alle $\gamma < \beta$. Dann ist also $\alpha \oplus \beta = \bigcup \{\alpha \oplus \gamma \colon \gamma < \beta\}$, sowie
$$(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) = \bigcup \{\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \gamma) \colon \gamma < \beta\}.$$
Nach Induktionsannahme existieren Ordnungsisomorphismen
$$f_\gamma \colon (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \gamma) \to \alpha \oplus \gamma,$$
die einander fortsetzen (wegen Eigenschaft ($\star$)). Dann ist
$$f = \bigcup_{\gamma<\beta} f_\gamma \colon (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \to \alpha \oplus \beta$$
ein Isomorphismus, der nach Konstruktion alle früheren Isomorphismen f_γ für $\gamma < \beta$ fortsetzt, also ($\star$) erfüllt.

Ordinalprodukt.

- Induktionsbeginn: Für $\beta = 0$ ist $\alpha \odot \beta = 0 = \emptyset = \beta \times \alpha$.
- Nachfolgerfall. Angenommen, es existiert ein Ordungsisomorphismus $f_\beta \colon \alpha \odot \beta \to \beta \times \alpha$.
Nach Definition ist $\alpha \odot (\beta^+) = (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha$, und diese Wohlordnung ist ordnungsisomorph zu einer Kopie von $\alpha \odot \gamma$, gefolgt von einer Kopie von α.
Auf der anderen Seite ist $(\beta^+) \times \alpha = (\beta \times \alpha) \cup (\{\beta\} \times \alpha)$, ist also isomorph zu einer Kopie $(\beta \times \alpha)$, an welches an weitere Kopie von α abgehängt wurde. Es ist also klar, dass wir den Isomorphismus f_β zu einem Isomorphismus f_{β^+} erweitern können. Insbesondere ist ($\star$) erfüllt für f_{β^+}.
- Limesfall. Es sei β ein Limes, so dass Isomorphismen f_γ existieren für alle $\gamma < \beta$. Dann ist $\alpha \odot \beta = \bigcup \{\alpha \odot \gamma \colon \gamma < \beta\}$ sowie
$$\beta \times \alpha = \left(\bigcup \{\gamma \colon \gamma < \beta\}\right) \times \alpha = \bigcup \{\gamma \times \alpha \colon \gamma < \beta\}.$$
Nach Induktionsannahme existieren Ordnungsisomorphismen
$$f_\gamma \colon \gamma \times \alpha \to \alpha \odot \gamma$$
die einander fortsetzen (wegen Eigenschaft ($\star$)). Dann ist
$$f = \bigcup_{\gamma<\alpha} f_\gamma \colon \beta \times \alpha \to \alpha \odot \beta$$
ein Isomorphismus, der nach Konstruktion alle früheren Isomorphismen f_γ für $\gamma < \beta$ fortsetzt, also ($\star$) erfüllt. □

Beispiele:

- $\alpha^+ = \alpha \oplus 1$, $\alpha^{++} = \alpha \oplus 2$, etc...
- $1 \oplus \omega = \bigcup \{1 + n \colon n \in \omega\} = \omega \neq \omega \oplus 1$,
- $2 \odot \omega = \bigcup \{2n \colon n \in \omega\} = \omega \neq \omega \oplus \omega$.

Es gelten also nicht alle Rechengesetze, die wir von den natürlichen Zahlen gewöhnt sind.

Lemma 5.13. *Die folgenden Gleichungen gelten für alle Ordinalzahlen α, β, γ:*

(1) $0 \oplus \alpha = \alpha$,
(2) $0 \odot \alpha = 0$,
(3) $\alpha \odot 1 = \alpha = 1 \odot \alpha$,
(4) $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$,
(5) $\alpha \odot (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$,
(6) $\alpha \odot (\beta \odot \gamma) = (\alpha \odot \beta) \odot \gamma$.

Beweis. Wir können uns jeweils entscheiden, ob wir mit der rekursiven oder der geometrischen Definition arbeiten. Wir geben Beispiele für beide Verfahren.

Für die geometrischen Beweise für (4) und (5), siehe Tafel.

Für einen induktiven Beweis für (6) führen wir eine Induktion nach γ. Für $\gamma = 0$ ist die Sache klar. Im Nachfolgerfall gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \odot \left(\beta \odot \gamma^{+}\right) &= \alpha \odot ((\beta \odot \gamma) \oplus \beta) \quad \text{(Def)} \\
&= (\alpha \odot (\beta \odot \gamma)) \oplus (\alpha \odot \beta) \quad (5) \\
&= ((\alpha \odot \beta) \odot \gamma) \oplus (\alpha \odot \beta) \quad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= (\alpha \odot \beta) \odot \gamma^{+} \quad \text{(Def)}
\end{aligned}$$

Wenn γ ein Limes ist, so ist (z.B. mit der geometrischen Beschreibung) leicht einzusehen, dass auch $\beta \odot \gamma$ ein Limes ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (\beta \odot \gamma) &= \bigcup \{\alpha \odot \delta \colon \delta < \beta \odot \gamma\} \quad \text{(Def)} \\
&= \bigcup \left\{\alpha \odot \delta \colon \delta < \bigcup \{\beta \odot \eta \colon \eta < \gamma\}\right\} \quad \text{(Def)} \\
&\color{red}{=} \bigcup \{\alpha \odot (\beta \odot \eta) \colon \eta < \gamma\} \quad \text{(Nachdenken)} \\
&= \bigcup \{(\alpha \odot \beta) \odot \eta \colon \eta < \gamma\} \quad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= (\alpha \odot \beta) \odot \gamma \quad \text{(Def)}
\end{aligned}$$

Warum genau gilt das rote Gleichheitszeichen?

Für '$\subseteq$', sei $\xi \,\varepsilon \bigcup \{\alpha \odot \delta \colon \delta < \bigcup \{\beta \odot \eta \colon \eta < \gamma\}\}$ beliebig. Dann existiert $\eta < \gamma$ sowie $\delta < \beta \odot \eta$ mit $\xi \,\varepsilon\, \alpha \odot \delta$. Da aber für alle Ordinalzahlen α und $\mu < \nu$ gilt, dass $\alpha \odot \mu < \alpha \odot \nu$ (klar nach geometrischer Definition), gilt insbesondere $\xi \in \alpha \odot (\beta \odot \eta)$.

Sei umgekehrt $\xi \,\varepsilon \bigcup \{\alpha \odot (\beta \odot \eta) \colon \eta < \gamma\}$. Dann existiert $\eta < \gamma$ mit $\xi \,\varepsilon\, \alpha \odot (\beta \odot \eta)$. Da γ ein Limit ist, gilt $\eta < \eta^{+} < \gamma$, und somit für $\delta := \beta \odot \eta$ haben wir $xi \,\varepsilon\, \alpha \odot \delta$, $\delta < \beta \oplus \eta^{+}$ und $\eta^{+} < \gamma$.

$\square$