7. Kardinalzahlen

7.1. Wann ist eine Menge kleiner als eine andere?

Definition 7.1. Für zwei Mengen x und y schreibe

- $x \preccurlyeq y :\Leftrightarrow (\exists f)(f\colon x \to y$ ist eine Injektion$)$,
- $x \approx y :\Leftrightarrow (\exists f)(f\colon x \to y$ ist eine Bijektion$)$, sowie
- $x \prec y :\Leftrightarrow (x \preccurlyeq y) \wedge \neg(y \preccurlyeq x)$.

Offensichtlich gilt

(1) $\preccurlyeq$ ist transitiv und reflexiv.
(2) $x \subseteq y$ impliziert $x \preccurlyeq y$.
(3) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 7.2. *Es gilt* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (0,1) \times (0,1) \preccurlyeq (0,1) \approx \mathbb{R}$.

Theorem 7.3 (Satz von Schröder-Bernstein)**.** *ZF. Für zwei Mengen x und y gilt $x \approx y$ genau dann, wenn $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$.*

Beweis. Für die nicht-triviale Rückrichtung definiere rekursiv[11] Mengen x_n und y_n für $n \in \omega$ durch $x_0 = x$, $y_0 = y$, sowie

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) \text{ und } y_{2n+1} = g(y_{2n}); \quad x_{2n+2} = g(x_{2n+1}) \text{ und } y_{2n+2} = f(y_{2n+1}).$$

Es gilt anscheinend $x_0 \supseteq y_1 \supseteq x_2 \supseteq y_3 \supseteq \cdots$ und $y_0 \supseteq x_1 \supseteq y_2 \supseteq x_3 \supseteq \cdots$. Es sei $P = \bigcap_{n<\omega} x_{2n}$ und $Q = \bigcap_{n<\omega} x_{2n+1}$. Dann ist

- $f \restriction P$ eine Bijektion zwischen P und Q (mit Umkehrfunktion $g \restriction Q$),
- $f \restriction x_{2n} \setminus y_{2n+1}$ eine Bijektion zwischen $x_{2n} \setminus y_{2n+1}$ und $x_{2n+1} \setminus y_{2n+2}$, und schließlich
- $g^{-1} \restriction y_{2n+1} \setminus x_{2n+2}$ eine Bijektion zwischen $y_{2n+1} \setminus x_{2n+2}$ und $y_{2n} \setminus x_{2n+1}$. □

Insbesondere gilt $x \prec y$ genau dann, wenn eine Injektion von x nach y existiert, aber keine Bijektion.

Beispiel 7.4. *Es gilt* $\mathcal{P}(\omega) \approx 2^\omega \approx \mathbb{R} \approx \mathbb{C}$.

Theorem 7.5 (Cantor)**.** *Für alle Mengen x gilt $x \prec \mathcal{P}(x)$.*

Beweis. $x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$, denn die Abbildung $t \mapsto \{t\}$ ist eine Injektion von x nach $\mathcal{P}(x)$. Angenommen, es gäbe eine Bijektion $f\colon x \to \mathcal{P}(x)$. Betrachte die Menge

$$y = \{t \mathrel{\varepsilon} x\colon \neg(t \mathrel{\varepsilon} f(t))\} \in \mathcal{P}(x).$$

Nach Annahme existiert $s \mathrel{\varepsilon} x$ mit $f(s) = y$. Dann aber $s \mathrel{\varepsilon} y$ genau dann, wenn $\neg(s \mathrel{\varepsilon} y)$, Widerspruch. □

Die Äquivalenzlassen bezüglich $\approx$ sind echte Klassen.[12] Wir können trotzdem (mittels AC) einen kanonische Vertreter aus jeder Äquivalenzklasse auswählen: Denn nach dem Wohlordnungssatz enthält jede Äquivalenzklasse eine Ordinalzahl, und wir definieren $|x|$ als die kleinste solche Ordinalzahl. Formal ist also

$$|x| := \bigcap \{\alpha \mathrel{\varepsilon} \gamma(x)\colon \alpha \approx x\} = \min\{\alpha \mathrel{\varepsilon} \gamma(x)\colon \alpha \approx x\},$$

wobei das $\gamma(x)$ aus Hartogs' Lemma kommt.

[11] Formal definieren wir mithilfe des Rekursionstheorems eine Funktionsklasse $F\colon \omega \to \mathcal{P}(x \cup y) \times \mathcal{P}(x \cup y)$.

[12] Wäre zum Beispiel die Klasse aller ein-elementigen Mengen eine echte Menge, so wäre nach dem Ersetzungsaxiom unter der Funktionsklasse $\{x\} \mapsto x$ auch V eine Menge, Widerspruch.

7.2. **Die Alephs.**

Definition 7.6. Eine (von Neumann) *Kardinalzahl* ist eine Ordinalzahl κ mit $(\forall \beta < \kappa)(\beta \prec \kappa)$.

Äquivalent könnten wir sagen, dass κ eine Kardinalzahl ist, wenn $\kappa = |x|$ für irgendein x. Jede endliche Ordinalzahl ist eine Kardinalzahl, und ebenso ist ω eine Kardinalzahl. Jeder Wert der Hartogs-Funktion $x \mapsto \gamma(x)$ ist eine Kardinalzahl.[13]

Definition 7.7. Die Kardinalzahlen $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{ON}$) sind rekursiv definiert durch

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$.
- $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \gamma(\aleph_\alpha)$.
- $\aleph_\lambda = \omega_\lambda = \sup \{\aleph_\beta \colon \beta < \lambda\}$ für Limes λ.

Mit transfiniter Induktion zeigt man, dass jedes $\aleph_\alpha$ in der Tat eine Kardinalzahl ist. Nach der Vorbemerkung über Hartogs' Funktion ist das klar für Nachfolger. Und falls $\alpha < \aleph_\lambda$ für ein Limes λ, so $\alpha < \aleph_\beta$ für ein $\beta < \lambda$, also $\alpha \prec \aleph_\beta \preccurlyeq \aleph_\lambda$.

Umgekehrt ist jede unendliche Kardinalzahl von der Form $\aleph_\alpha$ ist für ein geeignetes α. Denn für jede Ordinalzahl δ gilt $\delta \leq \aleph_\delta$ (transfinite Induktion), und somit existiert eine kleinste Ordinalzahl α mit $\delta \leq \omega_\alpha$. Wenn δ eine Kardinalzahl ist, so folgt $\delta = \aleph_\alpha$ (Übung).

7.3. **Kardinalzahl-Arithmetik.**

Definition 7.8. Für Kardinalzahlen κ, λ definiere

- $\kappa + \lambda = |\kappa \oplus \lambda|$.
- $\kappa.\lambda = |\kappa \times \lambda|$.
- $\kappa^\lambda = |\{f \colon f \text{ eine Funktion } \lambda \to \kappa\}|$.

Achtung: Kardinalpotenzen sind verschieden von Ordinalpotenzen!

Beispiel 7.9. *Es gilt* $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

Theorem 7.10. *Für* $\alpha \in \mathrm{ON}$ *gilt* $\aleph_\alpha.\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Das ist klar für $\aleph_0 = \omega$, indem wir $\omega \times \omega$ 'diagonal' aufzählen. Oder $\omega \times \omega \preccurlyeq \omega$ via $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$.

Beweis. Induktion nach α. Die Abbildung $\beta \mapsto (\beta, \beta)$ gibt uns $\aleph_\alpha \preccurlyeq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$.

Nach Schröder-Bernstein reicht es, auch $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \preccurlyeq \aleph_\alpha$ zu zeigen.

Definiere eine Wohlordnung $\lhd$ auf $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ indem wir $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ 'in aufsteigende Quadrate' unterteilen: $(\xi_1, \xi_2) \lhd (\eta_1, \eta_2)$, wenn $\max\{\xi_1, \xi_2\} < \max\{\eta_1, \eta_2\}$, oder wir Gleichheit bei den Maxima haben und (ξ_1, ξ_2) lexikographisch vor (η_1, η_2) kommt. Dies ist in der Tat eine Wohlordnung.

Beispiel: das Anfangssegment $[\langle 0, 0\rangle, \langle \omega + 1, \omega + 1\rangle]$ hat Ordnungstyp $w \odot 3 + 1$.

Behauptung: Jedes echte Anfangssegment von $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \lhd)$ hat Kardinalität $< \aleph_\alpha$. [Somit hat jedes Anfangssegment Ordungstyp $< \aleph_\alpha$, also hat $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \lhd)$ Ordungstyp $\leq \aleph_\alpha$, woraus die Behauptung folgt].

Sei $I = [\langle 0, 0\rangle, \langle \xi_1, \xi_2\rangle)$ ein echtes Anfangssegment. Dann $I \subseteq \beta \times \beta$ für ein $\beta < \aleph_\alpha$. Da $|b| < \aleph_\alpha$ folgt nach Induktionsannahme, dass $|\beta \times \beta| = |\beta|$ (oder β ist endlich), also $|I| \leq |\beta \times \beta| = |\beta| < \aleph_\alpha$, wie gewünscht. ☐

Beispiel 7.11. *Wie viele Folgen reeler Zahlen gibt es?* $|\mathbb{R}^\omega| = |\mathbb{R}|^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0.\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

Für das dritte Gleichheitszeichen haben wir schon (3) aus den folgenden Rechenregeln für Kardinalzahlen angewandt:

[13]Denn $\gamma(x) = \{\alpha \in \mathrm{ON} \colon \alpha \preccurlyeq x\}$ nach Konstruktion. Dann gilt $\alpha \prec \gamma(x)$ für alle $\alpha \,\varepsilon\, \gamma(x)$, denn wäre $\alpha \approx \gamma(x)$, so $\gamma(x) \preccurlyeq x$, also $\gamma(x) \,\varepsilon\, \gamma(x)$, Widerspruch.

Lemma 7.12. *Es seien κ, λ, μ Kardinalzahlen.*

(1) Wenn $\kappa \leq \lambda$, dann $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$, $\kappa.\mu \leq \lambda.\mu$ und $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
(2) $\kappa.(\lambda + \mu) = \kappa.\lambda + \kappa.\mu$ und $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda + \kappa^\mu$.
(3) $\kappa^{\lambda.\mu} = \left(\kappa^\lambda\right)^\mu$ und $(\kappa.\lambda)^\mu = \kappa^\mu.\lambda^\mu$.

Beweis. Routine. □

Korollar 7.13. *Für $\alpha \leq \beta \in \mathrm{ON}$ gilt $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha.\aleph_\beta = \aleph_\beta$.*

Beweis. $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta = 2.\aleph_\beta \leq \aleph_\beta.\aleph_\beta = \aleph_\beta$. □

Korollar 7.14. *Für $\alpha \leq \beta \in \mathrm{ON}$ gilt $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.*

Beweis. $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha.\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. □

Die *Kontinuumshypothese* ist die Aussage $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sie kann weder in ZFC bewiesen, noch widerlegt werden.

7.4. **Vorschläge für die Nachbereitung zur Vorlesung.** Die folgenden Vorschläge könnten beim Nachbereiten des siebten Kapitels hilfreich sein.

Vorschlag 28. *Beweisen Sie $(0,1) \approx [0,1]$ auf zwei verschiedene Weisen: indem Sie Schröder-Bernstein benutzen; und indem sie eine konkrete Bijektion angeben.*

Vorschlag 29. *Details zum formalen Beweis von Satz 7.3:*

(1) Geben sie eine hinreichend formale Formel (über dem Vokabular der Mengenlehre, eingeführte Abkürzungen erlaubt) an, die besagt, dass $n \in \omega$ gerade ist.
(2) Definieren Sie präzise eine Funktionsklasse G, so dass das zugehörige F, welches uns durch das Rekursionstheorem gegeben wird, genau dem F aus dem Beweis von Satz 7.3 entspricht.

Vorschlag 30. *Zeigen Sie, dass jede Kardinalzahl von der Form $\aleph_\alpha$ ist für ein geeignetes $\alpha \in \mathrm{ON}$.*

Vorschlag 31. *Beweisen Sie Lemma 7.12.*

Vorschlag 32. *Zeigen Sie, dass es $2^{\aleph_0}$ viele stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt. [Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass jede stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig definiert ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$.]*

Vorschlag 33. *Zeigen Sie wie folgt, dass es eine Zweifärbung der reellen Zahlen gibt, so dass für jeden von der Identität verschiedenen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass x und $f(x)$ verschieden Farben haben:*

(1) Es gibt $2^{\aleph_0}$ viele Homöomorphismen von $\mathbb{R}$.
(2) Für jeden von der Identität verschiedenen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert ein nicht-triviales Interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $f((a,b)) \cap (a,b) = \emptyset$.
(3) Wohlordnen Sie die Menge der Homöomorphismen als $\left\{f_\alpha\colon \alpha < 2^{\aleph_0}\right\}$ und färben Sie rekursiv für jedes α ein neues Punktepaar $x_\alpha \neq y_\alpha$, für das $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ gilt, mit verschiedenen Farben.

Vorschlag 34. *Zeigen Sie in ZF, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen nicht Kardinalität $\aleph_2$ haben kann. [Bemerkung: Ohne das Auswahlaxiom ist es möglich, dass eine solche Vereinigung tatsächlich Kardinalität $\aleph_1$ hat.]*

Literatur

[1] P.T. Johnstone, Notes on Logic and Set Theory, Cambridge University Press, 1987.