Einführung in die Mathematische Logik und Mengenlehre

Aufgabenblatt 6

(Abgabe am 23. Januar 2017. Besprechung am 26. Januar 2017.)

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass unter ZF die folgenden Definitionen einer Ordinalzahl äquivalent sind:

(1) Einer Ordinalzahl ist eine transitive Menge, die durch ε wohlgeordnet ist.
(2) Einer Ordinalzahl ist eine transitive Menge, die durch ε linear geordnet ist.

Aufgabe 2: Finden Sie Teilmengen von $(\mathbb{Q}, <)$ mit Ordnungstyp $\omega \oplus \omega$, $\omega^2 = \omega \odot \omega$ und ω^3.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass für jede abzählbare Ordinalzahl α eine Teilmenge von $(\mathbb{Q}, <)$ existiert mit Ordnungstyp α.

Aufgabe 4: Es seien α, β, γ Ordinalzahlen mit $\beta < \gamma$. Beweisen Sie entweder anhand der rekursiven oder der geometrischen Definition, dass $\alpha \oplus \beta < \alpha \oplus \gamma$ und $\beta \oplus \alpha \leq \gamma \oplus \alpha$. Könnte man bei der zweiten Ungleichung auch $<$ beweisen?

Aufgabe 5: Es seien α und β Ordinalzahlen mit $\alpha \geq \beta$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Ordinalzahl γ existiert mit $\beta \oplus \gamma = \alpha$. Muss ein γ existieren mit $\gamma \oplus \beta = \alpha$?

Aufgabe 6: Ist ω_1 ein Nachfolger oder ein Limes? Es sei $\alpha \neq 0$ eine abzählbare Limesordinalzahl. Zeigen Sie, dass eine monoton steigende Folge von Ordinalzahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$ gibt mit Supremum gleich α. Gilt das auch für $\alpha = \omega_1$?

Aufgabe 7: Wir definieren Potenzen α^β für Ordinalzahlen α, β mithilfe von Rekursion nach β wie folgt:

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{falls } \beta = 0, \\ (\alpha^\gamma) \odot \alpha & \text{falls } \beta = \gamma^+ \text{ ein Nachfolger ist,} \\ \bigcup \{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\} & \text{falls } \beta \text{ ein Limes verschieden von 0 ist.} \end{cases}$$

Man zeige mittels transfiniter Induktion, dass die folgenden Rechengesetze für Ordinalzahlen α, β und γ gelten:

- $\alpha^{(\beta \oplus \gamma)} = \alpha^\beta \odot \alpha^\gamma$, und
- $\alpha^{(\beta \odot \gamma)} = \left(\alpha^\beta\right)^\gamma$.

Verifizieren Sie auch, dass

- $2^\omega = \omega$.

Aufgabe 8: Es sei $F\colon \mathrm{ON} \to \mathrm{ON}$ eine Funktionsklasse mit

(1) $\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta)$ (für $\alpha, \beta \in \mathrm{ON}$),
(2) $F(\lambda) = \bigcup \{F(\alpha) \colon \alpha < \lambda\}$ (für Limesordinalzahlen λ).

Beweisen Sie, dass für alle Ordinalzahlen α eine Ordinalzahl $\beta \geq \alpha$ existiert mit $F(\beta) = \beta$ (also dass F beliebig große Fixpunkte hat). Was ist der kleinste, von Null verschiedene Fixpunkt der Funktionsklasse $F(x) = \omega \odot x$ (für $x \in \mathrm{ON}$)?

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $F(\alpha) \geq \alpha$ sein muss für alle Ordinalzahlen α.