Einführung in die Mathematische Logik und Mengenlehre

Aufgabenblatt 5

(Abgabe am 9. Januar 2017. Besprechung am 12. Januar 2017.)

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N},<)$ das Potenzmengenaxiom erfüllt. Erfüllt $(\mathbb{Q},<)$ das Potenzmengenaxiom?

Aufgabe 2: Schreiben Sie die folgenden Prädikate als Formeln über dem Vokabular $\{\varepsilon\}$ (verwenden Sie also keine der eingeführten Abkürzungen):
(1) $x = \langle y, x\rangle$, (2) $x = y \times z$, (3) $x = y \cup \{y\}$, (4) "x ist eine induktive Menge", (5) $x = \omega$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass sich das Paarmengenaxiom sowie die Aussonderungsaxiome ableiten lassen aus dem Nullmengenaxiom, dem Potenzmengenaxiom und den Ersetzungsaxiomen.

> *Tipp:* Um Auss_p für eine Formel p zu verifizieren, betrachten sie die Funktionsklasse, die die Identität ist für Mengen, die p erfüllen, und sonst undefiniert ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass in ZF jede nicht-leere transitive Menge die leere Menge enthält. Zeigen Sie, dass für jede transitive Menge x auch die Vereinigungsmenge $\bigcup x$, die Schnittmenge $\bigcap x$, sowie die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$ transitiv ist. Ist eine der Umkehrungen der letzten drei Aussagen wahr?

Aufgabe 5: Eine Klasse M heißt *transitiv*, wenn

$$(\forall x, y)(((y\,\varepsilon\,x) \wedge (x\,\varepsilon\,M)) \to (y\,\varepsilon\,M)).$$

(1) Zeigen Sie, dass für transitives M und (V,ε) ein beliebiges Modell der Mengelehre, die Unterstruktur (M_V,ε) von (V,ε) das Extensionalitätsaxiom erfüllt.[1]
(2) Zeigen Sie weiterhin unter obigen Annahmen, dass (M_V,ε) genau dann das Nullmengen-, Paarmengen- sowie Vereinigungsmengenaxiom erfüllt, wenn M_V abgeschlossen ist unter den Interpretationen der entsprechenden Funktionssymbole $\emptyset_V$, $\{\cdot\}_V$ und $\bigcup_V$.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass das Theorem zur Epsiloninduktion 4.5 das Fundierungsaxiom impliziert.

Aufgabe 7: Ergänzen Sie die fehlenden Details im Beweis von Theorem 4.6 zur Epsilonrekursion.

Aufgabe 8: In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass wir die Multiplikation $\cdot$ auf den natürlichen Zahlen ω schon definiert haben. Man zeige die Existenz der Fakultätsfunktion $n \mapsto n!$.

> *Tipp:* Man finde zuerst eine geeignete Funktionsklasse G, so dass das Rekursionstheorem eine Funktion $F'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $F'(n) = \langle n, n!\rangle$ zurückgibt.

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass die ε-Relation eingeschränkt auf eine Teilmenge $a \subseteq \omega$ extensionell und fundiert ist. Welche Menge b gibt uns der Mostowskische Isomorphiesatz?

Bonusaufgabe: Sei $(\mathbb{Q},<)$ die Menge der rationalen Zahlen versehen mit der üblichen linearen Ordnung über dem Vokabular $\tau = \{<\}$. Zeigen Sie, dass es Formeln $\psi_1(x_0,x_1),\ldots,\psi_8(x_0,x_1)$ über τ gibt, so daß für jede Formel $\varphi(x_0,x_1)$ über τ ein $n \leq 8$ existiert mit

$$(\mathbb{Q},<) \models \varphi(x_0,x_1) \leftrightarrow \psi_n(x_0,x_1).$$

> *Tipp:* Finden Sie zuerst 8 verschiedene quantorfreie Formeln in zwei Variablen, die paarweise verschiedene Interpretationen in $\mathbb{Q}^2$ haben. Zeigen Sie anschließend mit einer Induktion über den Formelaufbau, dass die Interpretation jeder Formel über τ mit der Interpretation einer quantorfreien Formel übereinstimmt.

[1] Hierbei ist M_V die Interpretation von M in V (bestehend aus allen Elementen von V, die die definierende Formel von M erfüllen).