Einführung in die Mathematische Logik und Mengenlehre

Aufgabenblatt 4

(Abgabe am 12. Dezember 2016. Besprechung am 15. Dezember 2016.)

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Aussagen

$$(\forall x, y)((x \equiv y) \to (y \equiv x))$$

und

$$(\forall x, y, z)((x \equiv y) \to ((y \equiv z) \to (x \equiv z)))$$

Theoreme der Prädikatenlogik sind. Schließen Sie, dass die Relation $\sim$ aus dem Beweis des Vollständigkeitssatzes tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie mit allen Details, dass die Interpretation von Relationssymbolen im Vollständigkeitssatz wohldefiniert sind.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Theorie der Körper endlicher Charakteristik nicht axiomatisierbar ist (über dem Vokabular τ für Körper). Zeigen Sie, dass die Theorie der Körper mit Charakteristik 0 zwar axiomatisierbar ist, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4: Es sei τ das Vokabular mit genau einem binären Relationssymbol $<$, und sei T die Theorie mit den Axiomen bestehend aus den jeweiligen universellen Abschlüssen von

$$\begin{aligned}
p_0 &= \neg(x < x) \\
p_1 &= (x < y) \vee (y < x) \vee (x \equiv y) \\
p_2 &= (x < y) \wedge (y < z) \to (x < z) \\
p_3 &= (\exists y, z)(y < x) \wedge (x < z) \\
p_4 &= (\exists w)(x < y) \to ((x < w) \wedge (w < y)),
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass jedes abzählbare T-Modell isomorph zu den rationalen Zahlen mit der natürlichen Ordnung $(\mathbb{Q}, <)$ sind. Finden Sie zwei T-Modelle der Mächtigkeit $|\mathbb{R}|$, die nicht zueinander isomorph sind.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass PA nicht abzählbar-kategorisch ist (gesucht ist also ein *abzählbares* Modell von PA welches nicht zu $\mathbb{N}$ isomorph ist).

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass das Assoziativgesetz und Kommutativgesetz

$$(\forall x, y, z)(axayz \equiv aaxyz) \quad \text{sowie} \quad (\forall x, y)(axy \equiv ayx)$$

beides Theoreme der Peano Arithmetik sind.

Aufgabe 7: Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$ heißt *definierbar ohne Parameter*, falls eine Formel $p(x)$ über dem Vokabular von PA ($= \{0, s, a, m\}$) existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

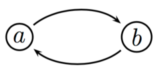
$$n \in S \Leftrightarrow \mathbb{N} \models p[n/x].$$

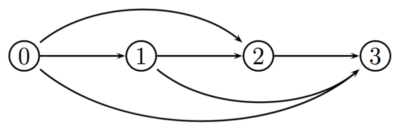
Hierbei ist n eine Abkürzung für den Term $\underbrace{ss\cdots s}_{n \text{ mal}}0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}$ definierbar ohne Parameter sind:

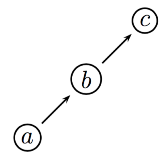
(1) $S_1 \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Quadrate,
(2) $S_2 \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen,
(3) $S_3 \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Zweierpotenzen,
(4) $S_4 \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Viererpotenzen,
(5) [gewaltige Herausforderung:] $S_5 \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Zehnerpotenzen.

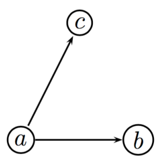
Aufgabe 8: Es sei ε ein binäres Prädikat. Jede geordnete Menge $(A, <_A)$ und jeder gerichtete Graph $G = (A, \vec{E})$ ist also in natürlicher Weise eine ε-Struktur (wobei die natürliche Interpretation $a\varepsilon_A b :\Leftrightarrow a <_X b$ bzw. $a\varepsilon_A b :\Leftrightarrow \vec{ab} \in \vec{E}$ ist).

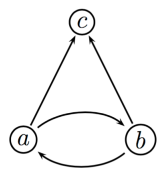
Welche der ZF-Axiome sind in den folgenden ε-Strukturen erfüllt?

(1)


(2)


(3)


(5)


(6)


(7) $(\mathbb{N}, <)$

(8) $(\mathbb{Q}, <)$