Einführung in die Mathematische Logik und Mengenlehre

Aufgabenblatt 3

(Abgabe am 28. November 2016. Besprechung am 1. Dezember 2016.)

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe nehmen wir den Korrektheitssatz und das Deduktionstheorem als gegeben. Beweisen Sie den Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik wie folgt:

(1) Wenn $S \cup \{s\} \vdash t$ und $S \cup \{\neg s\} \vdash t$, dann $S \vdash t$.

(2) Es sei $t \in F_\Omega(\{p_1, \ldots, p_n\})$ eine Aussage. Für $1 \leq i \leq n$ sei s_i entweder p_i oder $\neg p_i$, und $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Dann gilt entweder $S \vdash t$ oder $S \vdash \neg t$.

(3) Folgern Sie aus (1) und (2), dass für jede Tautologie $t \in F_\Omega(\{p_1, \ldots, p_n\})$ gilt, dass $\vdash t$.

Aufgabe 2: Finden Sie eine explizite Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass jede Tautologie der Länge n einen formalen Beweis in höchstens $f(n)$ Zeilen hat.

> *Tipp:* Zeigen Sie zuerst: Gibt es einen Beweis aus $S \cup \{s\} \vdash t$ in k Zeilen, dann gibt es einen Beweis von $S \vdash (s \to t)$ in $3k + 2$ Zeilen.

Aufgabe 3: Zwei Aussagenmengen S, T heißen *äquivalent*, falls $S \vdash t$ für alle $t \in T$, und $T \vdash s$ für alle $s \in S$. Eine Aussagenmenge S heißt *unabhängig*, wenn für alle $s \in S$ gilt, dass $S \setminus \{s\} \nvdash s$. Zeigen Sie, dass jede endliche Aussagenmenge eine zu ihr äquivalente, unabhängige Teilmenge hat. Finden Sie eine abzählbare Aussagenmenge, die keine zu ihr äquivalente unabhängige Teilmenge hat. Zeigen Sie, dass zu jeder abzählbaren Aussagenmenge S eine zu S äquivalente, unabhängige Menge T existiert.

Aufgabe 4: Es sei die Menge A durch $\leq$ partiell geordnet. Zeigen Sie, dass es eine lineare Ordnung $\leq'$ auf A gibt, die $\leq$ erweitert.

> *Tipp:* Man zeige zunächst induktiv, dass die Aussage für endliche Mengen A gilt. Nun wähle für jedes Paar $(a, b) \in A^2$ (in injektiver Weise) eine Variable p_{ab}, betrachte die Formelmenge
>
> $$X := \{p_{ab} : a, b \in A, a \leq b\} \cup \{p_{aa} : a \in A\} \cup \{p_{ab} \to \neg p_{ba} : a, b \in A, a \neq b\}$$
> $$\cup \{p_{ab} \land p_{bc} \to p_{ac} : a, b, c \in A\} \cup \{p_{ab} \lor p_{ba} : a, b \in A\},$$
>
> und finde eine Belegung, die X erfüllt.

Aufgabe 5: Formulieren Sie Vokabulare und Axiome in der erststufigen Logik für die folgenden Theorien.

(i) Die Theorie der Integritätsbereiche.

(ii) Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik 0.

(iii) Die Theorie der partiellen Ordnungen (auch Halbordnungen genannt).

(iv) Die Theorie der linear geordneten Körper.

(v) Die Theorie der Gruppen der Ordnung 168 [Tipp: Fügen Sie neue Konstanten hinzu].

(vi) Die Theorie der einfachen Gruppen der Ordnung 168.

Aufgabe 6:

(a) Definieren Sie einen sinnvollen Begriff einer *Unterstruktur* einer τ-Struktur A.

(b) Zeigen Sie, dass wenn B eine Unterstruktur von A ist, und $p(x_1, \ldots, x_n)$ eine quantorfreie Formel über τ ist, dann gilt

$$p_B = p_A \cap B.$$

[Falls Sie hier stecken bleiben, überdenken Sie Ihre Antwort zu (a).]

(c) Zeigen Sie, dass die Folgerung aus (b) nicht gilt, falls p Quantoren enthält [indem Sie z.B. das Zentrum einer Gruppe betrachten].

Aufgabe 7:

(a) Eine Theorie heißt *universell*, wenn alle Axiome von der Form $(\forall\vec{x})p = (\forall x_1)\dots(\forall x_n)p$ sind mit p quantorfrei. Zeigen Sie, dass für eine universelle Theorie T jede Unterstruktur eines T-Models selbst ein T-Model ist.

(b) T heißt *induktiv*, wenn alle Axiome in T von der Form $(\forall\vec{x})(\exists\vec{y})p$ sind mit p quantorfrei. Es sei T eine induktive Theorie, und A eine Struktur für das Vokabular von T. Angenommen, A ist die Vereinigung einer Familie von Unterstrukturen $\{B_i : i \in I\}$, welche total geordnet sei durch Inklusion und jedes B_i ist ein T-Modell. Zeigen Sie, dass dann auch A ein T-Modell ist.

(c) Welche der Theorien aus der ersten Aufgabe 5 sind (ausdrückbar) als universelle Theorien? Welche als induktive?

Aufgabe 8: Beweisen Sie den Korrektheitssatz aus der Vorlesung: *Es sei T eine Theorie, und p eine Formel. Wenn $T \vdash p$, dann $T \models p$.*