Einführung in die Mathematische Logik und Mengenlehre

Aufgabenblatt 2

(Abgabe am 14. November 2016. Besprechung am 17. November 2016.)

Aufgabe 1: Es sei $2 = \{0, 1\}$ mit der gewöhnlichen Struktur einer Boolschen Algebra, und es sei n eine natürlich Zahl. Zeige, dass jede Funktion $2^n \to 2$ ein Interpretation einer n-stelligen abgeleiteten Operation der Theorie der Boolschen Algebren ist [Tipp: Induktion nach n.] Folgern Sie, dass die freie Boolsche Algebra erzeugt durch X_n genau 2^{2^n} Elemente hat.

Aufgabe 2: Geben Sie eine formale Ableitung für das Theorem $(\perp \to q)$ an. Können Sie eine Ableitung in höchstens 7 Zeilen finden? Leiten Sie einen Beweis für $(\neg p \to (p \to q))$ ab.

Aufgabe 3: Beweisen Sie $\{p, g\} \vdash (p \wedge q)$ auf drei unterschiedliche Weisen: Indem Sie eine formale Ableitung angeben; mithilfe des Deduktionstheorems; und mithilfe des Vollständigkeitssatz.

Aufgabe 4: Wenden Sie das Deduktionstheorem an, um zu zeigen, dass die Aussagen $(p \to \neg\neg p)$ (die Umkehrung von Axiom (3)), und $((s \to t) \to (\neg t \to \neg s))$ Theoreme der Aussagenlogik sind.

Aufgabe 5: Drei Leute haben jeweils eine Menge an Überzeugungen: eine konsistente, deduktiv abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass die Menge an Aussagen, von denen alle drei überzeugt sind, auch konsistent und deduktiv abgeschlossen ist. Ist die Menge an Aussagen, von denen eine Mehrheit überzeugt sind, auch konsistent? Ist sie deduktiv abgeschlossen?

Aufgabe 6: Es seien $t_1, t_2, \ldots$ Aussagen, so dass für jede Belegung v es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\overline{v}(t_n) = 1$. Benutzen Sie den Kompaktheitssatz, um zu zeigen, dass es dann ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jede Belegung v es ein $n \leq N$ gibt mit $\overline{v}(t_n) = 1$.

Aufgabe 7: (Diese Aufgabe ist für diejenigen gedacht, die schon etwas vertraut mit Zorns Lemma sind.) Es sei T die Menge aller zusammengesetzten Aussagen über einer (nicht notwendigerweise abzählbaren) Menge P an primitiven Aussagen.

(1) Zeigen Sie, dass falls $\{C_i : i \in I\}$ eine Familie konsistenter Teilmengen von T ist, die total geordnet ist durch die Teilmengenrelation $\subseteq$ ist (d.h. für alle $i, j \in I$ gilt entweder $C_i \subseteq C_j$ oder $C_j \subseteq C_i$), so ist auch $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ eine konsistente Teilmenge von T.

(2) Benutzen Sie Zorns Lemma, um zu schließen, dass jede konsistente Teilmenge von T in einer maximale konsistenten Teilmenge von T enthalten ist.

(3) Zeigen Sie das eine konsistente Menge $M \subset T$ maximal konsistent ist genau dann wenn für alle $t \in T$, entweder $t \in M$ oder $\neg t \in M$.

(4) Beweisen Sie das Adequacy Theorem ohne die zusätzliche Annahme, dass P abzählbar ist.

Aufgabe 8: Es seinen P und T wie in der vorherigen Aufgabe, und es bezeichne V die Menge aller Belegungen von P (die Menge aller Funktionen $v : P \to \{0, 1\}$). Für jedes $t \in T$, definiere

$$U(t) = \{v \in V : \overline{v}(t) = 1\}.$$

(1) Zeigen Sie, dass $U(t_1) \cap U(t_2) = U(t_1 \wedge t_2)$, und schließen Sie, dass $\{U(t) : t \in T\}$ eine Basis für eine Topologie auf V bildet.

(2) Für $S \subset T$, zeigen Sie dass $S \Vdash \perp$ genau dann wenn $\{U(\neg t) : t \in S\}$ eine Überdeckung von V ist.

(3) Folgern Sie, dass der Kompaktheitssatz äquivalent zu der Aussage ist, dass V unter der betrachteten Topologie kompakt ist.