6. Das Auswahlaxiom

In diesem Kapitel untersuchen wir die zwei wichtigsten äquivalenten Formulierungen des Auswahlaxioms: Cantors Wohlordnungssatz sowie Zorns Lemma.

Lemma 6.1 (Hartogs' Lemma)**.** *Für jede Menge x existiert eine Ordinalzahl α, die nicht injektiv in x eingebettet werden kann.*

Beweis. Eine Ordinalzahl α kann genau dann in x eingebettet werden, wenn eine Teilmenge $y \subseteq x$ existiert und eine Wohlordung R auf y, so dass α der Ordnungstyp von (y, R) ist. Mengentheoretisch besteht R aus Paaren von Elementen von y, es gilt also $R \,\varepsilon\, \mathcal{P}(x \times x)$. Betrachte die Menge

$$z = \Big\{ R \,\varepsilon\, \mathcal{P}(x \times x) \colon R \text{ ist eine Wohlordnung auf } \bigcup\bigcup R \Big\},$$

die nach dem Potenzmengen- und Aussonderungsaxiom existiert.

Nach dem Isomorphiesatz von Mostowski 4.7 existiert eine Funktionsklasse, die jedes Element von z aus ihren Ordnungstyp abbildet. Nach dem Ersetzungsaxiom ist somit die Klasse $\gamma(x)$ aller Ordinalzahlen, die injektiv in x eingebettet werden können selbst wieder eine Menge. Da $\gamma(x)$ offensichtlich transitiv ist, ist $\gamma(x)$ somit eine Ordinalzahl—die nicht in x einbettet werden kann. □

Insbesondere gibt es also eine kleinste Ordinalzahl, die nicht in ω eingebettet werden kann. Diese Ordinalzahl nennt man auch ω_1. Nach dem Beweis von Hartogs' Lemma sind die Elemente von ω_1 gerade die abzählbaren Ordinalzahlen.

Theorem 6.2 (Wohlordnungstheorem)**.** *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Aussage, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.*[10]

Beweis. "$\Leftarrow$". Sei $f\colon x \to y$ eine Funktion mit $f(t) \neq \emptyset$ für alle $t \,\varepsilon\, x$. Sei $<$ eine Wohlordnung auf $\bigcup y$. Dann definiert

$$g\colon x \to \bigcup y,\ t \mapsto \min_{<} f(t)$$

eine Funktion (wohldefiniert, da $\emptyset \neq f(t) \subseteq \bigcup y$) mit $f(t) \,\varepsilon\, g(t)$.

"$\Rightarrow$". Gegeben sei eine nicht-leere Menge x, die wir wohlordnen wollen. Wir wollen also die Elemente von x auflisten als $a_0, a_1, a_2, \dots, a_\omega, a_{\omega+1}, \dots, a_\alpha, \dots$ wobei wir im Schritt α jeweils eine Auswahlfunktion nutzen wollen, die uns das nächste Element $a_\alpha \,\varepsilon\, x \setminus \{a_\xi \colon \xi < \alpha\}$ aussucht.

Sei also $g\colon \mathcal{P}(x) \setminus \emptyset \to x$ eine Auswahlfunktion (für $f = \mathrm{id}\colon \mathcal{P}(x) \setminus \emptyset \to \mathcal{P}(x) \setminus \emptyset$). Nach dem Rekursionstheorem existiert eine Funktionsklasse $F\colon ON \to x$ mit

$$F(\alpha) = \begin{cases} g(x \setminus \{F(\beta) \colon \beta < \alpha\}) & \text{falls } x \setminus \{F(\beta) \colon \beta < \alpha\} \neq \emptyset \\ g(x)\ (= F(0)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Lemma 6.1 existiert eine Ordinalzahl γ, die nicht in x injektiv eingebettet werden kann; insbesondere kann $F \restriction \gamma$ nicht eine solche Einbettung sein. Es existiert also $\alpha \,\varepsilon\, \gamma$ mit $F(\alpha) = F(0)$. Wenn wir α minimal mit dieser Eigenschaft wählen, so ist $F \restriction \alpha$ eine bijektive Abbildung zwischen α und x. Somit kann x wohlgeordnet werden. □

Definition 6.3. Zorns Lemma ist die Aussage, dass jede nicht-leere, partiell geordnete Menge $(x, \leq)$ mit der Eigenschaft, dass jede linear geordnete Teilmenge $y \subseteq x$ eine obere Schranke in x (nicht notwenigerweise in y) hat, ein maximales Element besitzt.

Eine linear geordnete Teilmenge $y \subseteq x$ nennt man auch eine *Kette*.

Theorem 6.4. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu Zorns Lemma.*

[10] Die Aussage ist wie immer eine Kurzform für: *Ein Modell von ZF erfüllt das Auswahlaxiom genau dann, wenn jede Menge wohlgeordnet werden kann.*

Beweis. "$\Rightarrow$". Angenommen es existiert eine nicht-leere partiell geordnete Menge $(x, \leq)$ wie in Zorns Lemma, die aber kein maximales Element besitzt. Es sei C die Menge aller linear geordneten Teilmengen von x (existiert nach dem Potenzmengen- und Aussonderungsaxiom), und $f\colon C \to \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ die Funktion definiert durch $y \mapsto \{z \varepsilon x \colon (\forall t \varepsilon y)(t < z)\}$ (Aussonderungsaxiom; nicht-leer nach Annahme). Es sei $g\colon C \to x$ eine Auswahlfunktion für f (also eine Funktion, die jeder Kette in x eine *echte* obere Schranke in x zuordnet).

Definiere eine Funktionsklasse $F\colon ON \to x$ rekursiv durch

$$F(\alpha) = g(\{F(\beta) \colon \beta < \alpha\}).$$

Dann ist aber F eine ordnungserhaltende, und somit injektive Abbildung von ON in x. Inbesondere können wir also beliebig große Ordinalzahlen in x einbetten, im Widerspruch zu Lemma 6.1.

"$\Leftarrow$". Sei $f\colon x \to y$ eine Funktion mit $f(t) \neq \emptyset$ für alle $t \varepsilon x$. Definiere

$$(h \text{ ist eine Approximation für } g) :\Leftrightarrow (\exists z \subseteq x)\Big(\Big(h\colon z \to \bigcup y\Big) \wedge (\forall t \varepsilon z)(h(t) \varepsilon f(t))\Big)$$

[Eine Approximation ist eine Funktion, die zumindest für einen Teil der durch f indizierten Mengen Elemente auswählt.]

Es sei P die Menge aller Approximationen für g (Aussonderungsaxiom in $(\bigcup y)^{\mathcal{P}(x)}$), partiell geordnet durch $\subseteq$ (also durch Funktionserweiterung). Dann erfüllt $(P, \subseteq)$ die Eigenschaft von Zorns Lemma, denn die Vereinigung über eine Kette von Approximationen für g ist wiederum selbst eine Approximation für g.

Somit hat P nach Annahme ein maximales Element, sagen wir $h_0\colon z_0 \to \bigcup y$. Angenommen, h_0 wäre nicht auf ganz x definiert, also es gäbe ein $t \varepsilon x \setminus z_0$. Dann können wir aber ein b wählen mit $b \varepsilon f(t)$, und $h_1 := h_0 \cup \{\langle t, b\rangle\}$ wäre eine Approximation für g mit $h_0 \subsetneq h_1$, im Widerspruch zur Maximalität von h_0. □

Konsequenzen von AC:

Theorem 6.5 (Hamel, 1905)**.** *AC impliziert: Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Beweis. Wende Zorns Lemma an auf die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen des Vektorraums, partiell geordnet durch die Teilmengenrelation. Da eine Menge von Vektoren genau dann linear unabhängig ist, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist, folgt, dass die Vereinigung über eine Kette wieder selbst linear unabhängig ist. Der Beweis, dass eine maximale solche Menge den Vektorraum aufspannt ist klar. □

Theorem 6.6 (Krull, 1927)**.** *AC impliziert: Jedes echte Ideal in einem Ring mit* 1 *ist in einem maximalen echten Ideal enthalten.*

Beweis. Wende Zorns Lemma an auf die Menge aller echten Ideale, die unser Lieblingsideal enthalten, geordnet wie oben durch die Teilmengenrelation. Die Vereinigung über eine Kette von Idealen ist wiederum ein Ideal—und wenn alle Ideale in der Kette echte Ideale waren (wenn sie also nicht die 1 enthalten), so enthält auch die Vereinigung nicht die 1, ist also echt. □

Theorem 6.7 (Tychonoff, 1929)**.** *AC impliziert: Das kartesische Produkt beliebiger kompakter topologischer Räume ist wiederum kompakt.*

Beweis. Topologievorlesung. □

Wir merken an, dass diese drei Resultate wiederum äquivalent zum Auswahlaxiom sind.

Das Auswahlaxiom haben wir auch gebraucht im Beweis der Vollständigkeitssätze in Kapitel 2 und 3.

Das Auswahlaxiom hat neben diesen ,,angenehmen" Konsequenzen auch ein Paar ,,unschöne" Konsequenzen, wie das Banach-Tarski-Paradox, welches besagt, dass man den Einheitsball in

$\mathbb{R}^3$ in endlich viele Teile zerlegen kann, aus denen man durch Rotationen und Translationen zwei disjunkte Einheitsbälle zusammensetzen kann.

Deswegen ist es oft üblich, in Beweisen darauf hinzuweisen, wenn man das Auswahlaxiom verwendet. Manchmal ist es überraschend, wo das Auswahlaxiom überall gebraucht wird: zum Beispiel um die Äquivalenz der Folgenstetigkeit und ε-δ Stetigkeit für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeigen, benötigt man (eine schwache Version von) AC.

Vorschlag 25. *Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom äquivalent ist zur Aussage, dass das Kartesische Produkt* $\prod_{i \in I} A_i$ *nicht-leerer Mengen immer selbst nicht-leer ist.*

Vorschlag 26. *Beweisen Sie direkt, dass der Wohlordnungssatz und das Lemma von Zorn äquivalent sind.*

Vorschlag 27. *Das* Multiple-Choice Axiom (M-AC) *ist die Aussage, das für jede Familie* $\{f(t) \colon t \varepsilon x\}$ *nicht-leerer Mengen eine Funktion* g *existiert, so dass* $g(t) \subseteq f(t)$ *eine nicht-leere, endliche Teilmenge ist für alle* $t \varepsilon x$. *Zeigen Sie in* ZF, *dass unter M-AC jede Menge, die linear geordnet werden kann, auch wohlgeordnet werden kann.*