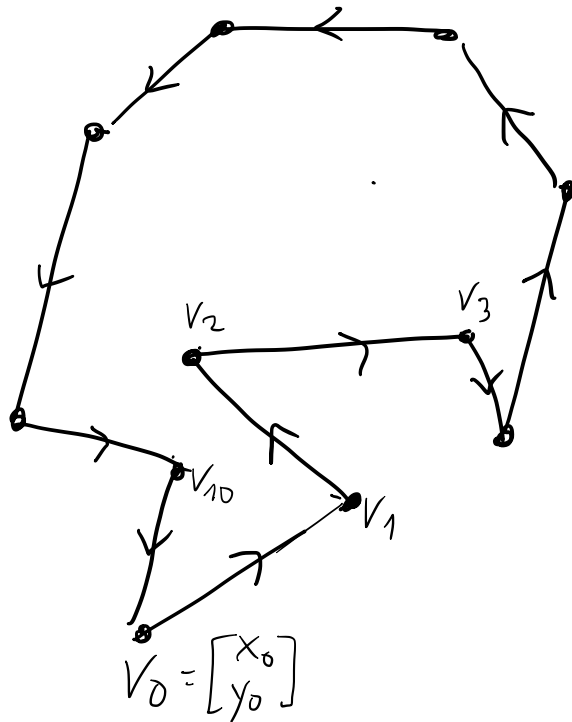


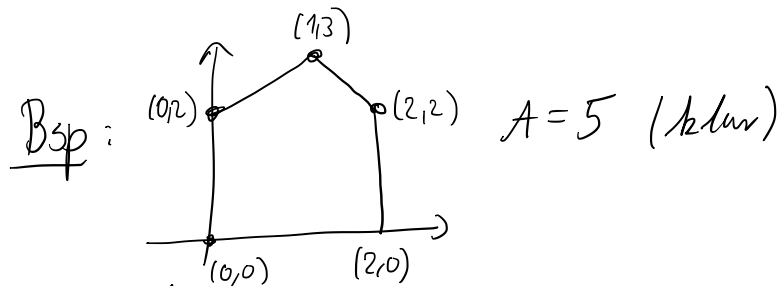
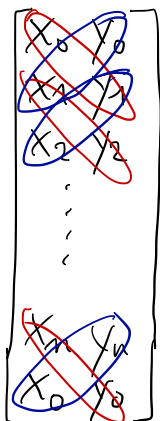
Lineare Abbildungen und Flächeninhalte

Die Schnürsenkel-Formel³³⁸. Es sei P ein Polygon im $\mathbb{R}^2$ dessen Ecken $v_0, \dots, v_n$ ($n \geq 2$) entgegen dem Uhrzeigersinn aufgelistet sind. Es sei $v_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$.

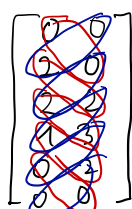


Dann ist der Flächeninhalt $A(P)$ gegeben durch die Formel

$$A = \frac{1}{2} \left[x_0 y_1 + x_1 y_2 + \dots + x_{n-1} y_n + x_n y_0 - x_1 y_0 - x_2 y_1 - \dots - x_n y_{n-1} - x_0 y_n \right]$$



Nachrechnen:



$$A = \frac{1}{2} [0 + 4 + 6 + 2 + 0 - 0 - 0 - 2 - 0 - 0] = \frac{1}{2} [12 - 2] = 5.$$

Beweis der Shoenerbergschen Formel

Für eine 2×2 Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sei

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc \in \mathbb{R} \quad (\text{heißt auch Determinante})$$

Lemma^{3.3.9}: Es gilt $\forall a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}$:

$$- \begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \quad + \text{mult}$$

Bew.: Einfaches Nachrechnen. $\square$

Bem.: Die Shoenerbergsche Formel lässt sich also äquivalent ausdrücken als

$$A = \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & x_0 \\ y_n & y_0 \end{vmatrix} \right]$$

Wir beweisen die Shoenerbergsche Formel nun mit einer Induktion nach der Anzahl der Ecken eines Polygons:

L.B.: $n=2$. Haben ein Polygon mit 3 Ecken

$$v_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

nummeriert gegen den Uhrzeigersinn.

Aus P4 wissen

wir:

Fläche Parallelogramm =

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_0 \\ y_1 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & x_2 - x_0 \\ y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

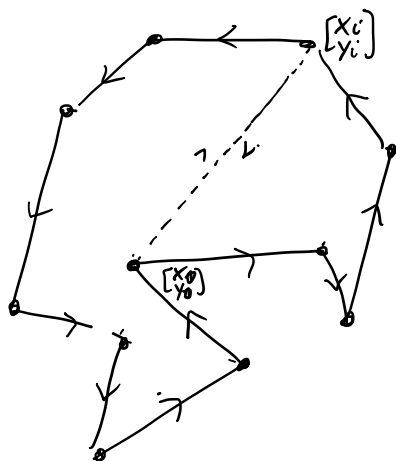
$$\stackrel{\text{Lemma}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ y_1 & y_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_0 & x_0 \\ y_0 & y_0 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\stackrel{\text{Lemma}}{=} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}$$

✓

Angenommen, die Formel gilt nun für alle Polygone mit $\leq n$ Ecken.

• Betrachte Polygon $v_0, \dots, v_n$



- Jedes Polygon hat Diagonale
- Nach Umnummerierung der Ecken: Diagonale $v_0 - v_i$

• Dann ist $P_1 = v_0, \dots, v_i, v_0$ und $P_2 = v_0, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_0$ Polygone, deren Ecken gegen den Uhrzeigersinn nummeriert wurden.

$$A(P) = A(P_1) + A(P_2)$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$\stackrel{IV}{=} \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \dots + \cancel{\begin{vmatrix} x_i & x_0 \\ y_i & y_0 \end{vmatrix}} \right)$$

$$+ \left(\cancel{\begin{vmatrix} x_0 & x_i \\ y_0 & y_i \end{vmatrix}} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & x_0 \\ y_n & y_0 \end{vmatrix} \right)$$

□