Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 8

(Abgabe am 4. Juni 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (4./5. Juni 2018):

P9: Wahr oder falsch?

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist ein Vektorraum.
(b) $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Vektorraum.
(c) $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
(d) Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist $g : x = k$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$

P10: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, der Raum aller reellwertigen Folgen, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Zeigen Sie, dass der Raum

$$F = \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

aller Fast-Fibonacci-Folgen ein Unterverktorraum ist.

P11: In $\mathbb{Z}_2^7$ seien die Vektoren $\vec{c}_1 = (1000011)$, $\vec{c}_2 = (0100101)$, $\vec{c}_3 = (0010110)$, $\vec{c}_4 = (0001111)$ gegeben. Der Untervektorraum $H := \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4 \rangle$ heisst **Hamming-Code**.

(a) $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)$ sind linear unabhängig. Wie viele Elemente hat H also?
(b) Zeigen Sie, dass das „Einswort“ $\vec{1} = (1111111)$ in H liegt.
(c) Berechnen Sie $\vec{1} + \vec{b}$ für einige $\vec{b} \in \mathbb{Z}_2^7$.
Was fällt Ihnen auf? Welche Konsequenz hat das für H?

Hausaufgaben (Abgabe am 4. Juni 2018, Besprechung 11./12. Juni 2018):

H29: *Rechenregeln für Matrizen.* a) Beweisen Sie, dass das Assoziativgesetz für $(\mathbb{R}^{m\times n}, +)$ gilt (wobei $+$ definiert ist wie in 2.3.2.)

b) Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 2.3.18: Für alle $A, A' \in R^{m\times n}$ und $B, B' \in R^{n\times r}$ gilt:

- $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A' \cdot B$ sowie $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$.
- $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

(5 Punkte)

H30: a) Welche drei Elementarmatrizen L_1, L_2, L_3 bringen die Matrix A in Dreieckform U?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad L_3 L_2 L_1 A = U$$

b) Multiplizieren Sie die L_i's zu einer Matrix L aus, die das ganze Eliminationsverfahren darstellt. Machen Sie die Probe, dass $LA = U$.

c) Lösen Sie mithilfe von L die Gleichungssysteme $[A||\vec{b}_i]$ für $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sowie $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix}$.

(5 Punkte)

H31: Berechnen Sie mithilfe der Methode aus P8(a)–(c) die Inverse Matrix A^{-1} zu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

und machen Sie anschließen die Probe, dass $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$. **(5 Punkte)**

H32: Es sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix, deren Spalten linear unabhängig sind. Berechnen Sie mithilfe der Methode aus P8(a)–(c) die inverse Matrix A^{-1}.

Bonus: Kann es eine inverse Matrix geben, wenn die Spalten linear abhängig sind? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte + 3 Bonuspunkte)