Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 7

(Abgabe am 28. Mai 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (28./29. Mai 2018):

P8: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Formen Sie die Matrix $[A||I_3] \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt $[I_3||L]$ um.
(b) Begründen Sie, dass $LA = I_3$.
(c) Erläutern Sie, warum L invertierbar ist und folgern Sie, dass $L = A^{-1}$.
(d) Was bedeutet es, wenn diese Umformungen scheitern?
(e) Lösen Sie das LGS $(A, \vec{b})$ für zwei beliebige rechte Seiten $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ Ihrer Wahl.

Hausaufgaben (Abgabe am 14. Mai 2018, Besprechung 21./22. Mai 2018):

H25: Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit dem Eliminationsverfahren aus der Vorlesung und bestimmen Sie jeweils die gesamte Lösungsmenge in Parameterform.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Vergleichen Sie jeweils, ob das Erzeugnis der Spaltenvektoren $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$ des LGS ein Punkt / Gerade / Ebene / ganzer Raum ist, mit der Tatsache ob die zugehörige Lösungsmenge ein Punkt / Gerade / Ebene / ganzer Raum ist. Was fällt Ihnen auf? **(6 Punkte)**

H26: Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2, M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in den folgenden Anteilen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält? **(5 Punkte)**

H27: Für eine Expedition stehen Konserven I, II, III und IV zur Verfügung.
Nebenstehender Tabelle ist der Gehalt an Vitaminen A, B und C in den einzelnen Konserven zu entnehmen (in geeigneten Einheiten).
Der gesamte Vitaminbedarf der Gruppe wird gedeckt, wenn 50 Konserven der Sorte I, 100 der Sorte II, 20 der Sorte III und 10 der Sorte IV mitgenommen werden.

Vitamin	I	II	III	IV
A	1	2	3	1
B	3	3	0	4
C	4	5	4	2

(a) Bestimmen Sie den gesamten Bedarf der Gruppe an den Vitaminen A, B und C.

(b) Gibt es andere Kombinationen der Konserven, mit denen die Gruppe ihren Vitaminbedarf abdecken kann? Wenn ja, wie viele?

Hinweis: Nutzen Sie (Kiechle Skript: 11.14). Beachten Sie auch, dass Sie keine halben oder negativen Konserven mitnehmen können!

(c) Welche Kombination an Konserven sollte die Gruppe wählen, wenn jede Konserve gleich viel wiegt und die Gruppe so wenig Gewicht wie möglich mitnehmen will?

(6 Punkte)

H28: Berechnen Sie

(a) alle erlaubten (!) Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ für

$$A = [2 \quad -1], \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) A^2, A^3, A^4, und $A^8 \cdot A^{10}$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Potenzrechengesetze in Halbgruppen.

(c) für $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ den Ausdruck P^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Induktion nach n.

(3 Punkte)