Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 6

(Abgabe am 14. Mai 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (14./15. Mai 2018):

P7: Lösen Sie mit dem Gaußalgorithmus das lineare Gleichungssystem (gegeben durch eine erweiterte Koeffizientenmatrix)

$$\left[\begin{array}{rrrr||c} 3 & 4 & -5 & 6 & b_1 \\ 6 & 5 & -6 & 5 & b_2 \\ 9 & -4 & 2 & 3 & b_3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & b_4 \end{array}\right]$$

für verschiedene rechte Seiten $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_4) \in \mathbb{R}^4$:

$$\vec{b} \in \left\{ \begin{bmatrix} 39 \\ 43 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 32 \\ 31 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Hausaufgaben (Abgabe am 14. Mai 2018, Besprechung 21./22. Mai 2018):

H21: Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ so gewählt, dass $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ für alle $i \neq j$. Man zeige, dass die $\vec{v}_i$ linear unabhängig sind.

> *Hinweis:* Betrachten Sie eine Linearkombination der Null aus den $\vec{v}_i$. Verwenden Sie dann den Trick aus dem abstrakten Beweis von Lemma 1.3.6.

(4 Punkte)

H22: Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Überprüfen Sie, auf welchen Ebenen die folgenden Punkte $\vec{x}_i$ jeweils liegen, und falls sie es tun, geben Sie die zugehörigen Parameter bezüglich der angegebenen Stütz- und Richtungsvektoren an.

(a) $\vec{x_1} = (1,1,2)$, *(b)* $\vec{x_2} = (1,2,3)$, *(c)* $\vec{x_3} = (10,-2,2)$, *(d)* $\vec{x_4} = (10,10,12)$, *(e)* $\vec{x_5} = (1,4,0)$

> *Tipp:* Berechnen Sie zuerst die Koordinatendarstellungen der Ebenen, um schnell entscheiden zu können, ob $\vec{x}_i \in E_1, E_2$ oder nicht.

(7 Punkte)

H23: Berechnen Sie den Schnittpunkt der folgenden drei Ebenen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(5 Punkte)

> *Tipp:* Berechnen Sie die Koordinatendarstellungen der Ebenen, und lösen Sie das entstehende LGS.

H24: Bestimmen Sie die Schnittmenge der folgenden zwei Ebenen in $\mathbb{R}^4$

$$E_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad E_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Überrascht Sie das Ergebnis? **(4 Punkte)**

Hinweis: In diesem Fall können wir nicht über die Koordinatendarstellung gehen (*warum nicht?*). Lösen Sie stattdessen direkt ein geeignetes LGS mit vier Unbekannten.