Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 5

(Abgabe am 7. Mai 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (7./8. Mai 2018):

P7: (Update) In dieser Aufgabe wollen wir Lemma 1.3.6 auf drei Dimensionen erweitern: Es seien $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ linear unabhängige Vektoren, und $\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\vec{u} \perp \vec{r}$ und $\vec{u} \perp \vec{s}$. Dann gilt für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \perp \vec{u}$, dass $\vec{a} \in \langle \vec{r}, \vec{s} \rangle$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(1) Zeigen Sie: Falls $\vec{a} \notin \langle \vec{r}, \vec{s} \rangle$, so sind $\vec{a}, \vec{r}, \vec{s}$ linear unabhängig.
(2) Folgen Sie dann dem abstrakten Beweis von Lemma 1.3.6.

Hausaufgaben (Abgabe am 7. Mai 2018, Besprechung 14./15. Mai 2018):

H17: Es seien $\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ so gewählt, dass $\vec{u} \perp \vec{v}_i$ für alle i. Man zeigen, dass dann auch $\vec{w} \perp \vec{u}$ für alle $\vec{w} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$. Begründen Sie, welche Eigenschaften des Skalarproduktes Sie in Ihrem Beweis ausnutzen. **(3 Punkte)**

H18: *In dieser Aufgabe geht es darum, ganz penibel zu beweisen, dass Aufpunkt und Richtungsvektor einer Geraden nicht eindeutig bestimmt sind.* Es seien also $\vec{v}, \vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{r} \neq \vec{0}$, und

$$\vec{x} \neq \vec{y} \in g = \vec{v} + \mathbb{R}\vec{r} = \{\vec{v} + \lambda\vec{r} \colon \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie: wenn $\vec{s} = \vec{x} - \vec{y}$, dann gilt für die Gerade

$$g' = \vec{x} + \mathbb{R}\vec{s} = \{\vec{x} + \mu\vec{r} \colon \mu \in \mathbb{R}\},$$

dass $g = g'$.

(5 Punkte)

Hinweis: Zeigen Sie für die Mengengleichheit $g = g'$ wie immer $\subseteq$ und $\supseteq$ separat. Für $\subseteq$ müssen sie also zeigen, dass ein beliebiger Punkt $\vec{a}$ der Form $\vec{a} = \vec{v} + \lambda\vec{r} \in g$ auch dargestellt werden kann in der Form $\vec{a} = \vec{x} + \mu\vec{s}$ für ein geeignetes $\mu \in \mathbb{R}$.

H19: Im $\mathbb{R}^3$ seien gegeben die Ebene $E \colon 2x_1 - x_2 + x_3 = 7$ und die Geraden

$$g = (1,0,1) + \mathbb{R}(1,2,-1), \qquad h = (2,0,3) + \mathbb{R}(1,1,-1).$$

Bestimmen Sie $E \cap g$ und $E \cap h$, und geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an.

(6 Punkte)

H20: Gegeben seien zwei Ebenen in Parameterdarstellung

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad E_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinatendarstellung der Ebenen an, und berechnen Sie anschließend den Schnitt der beiden Ebenen. Der Schnitt sollte eine Gerade sein: Geben Sie die Schnittgerade in Parameterform an.

(6 Punkte)