Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 4

(Abgabe am 30. April 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (30. April 2018):

P5: Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Geraden gegeben

$$g := \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}, \quad h := \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}, \quad \ell := \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}-6\\2\\4\end{bmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie die Geraden auf Parallelität.
(b) Bestimmen Sie eine Ebene $E : ax + by + cz = d$ mit $g, \ell \subseteq E$.
(c) Berechnen Sie $S = h \cap E$.

P6: Wahr oder falsch?

(a) Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ schneiden sich immer in einer Geraden.
(b) Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ können genau einen Schnittpunkt haben.
(c) Zwei windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$ liegen niemals in einer Ebene.
(d) Im $\mathbb{R}^4$ gibt es mindestens drei Geraden durch je zwei Punkte.

Hausaufgaben (Abgabe am 30. April 2018, Besprechung 7./8. Mai 2018):

H13: *Ein paar Rechenaufgaben.*

(1) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren in Richtung der Vektoren $\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie weiter Einheitsvektoren, die senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen.

(2) Bestimmen Sie Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, die zueinander und zu $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ senkrecht stehen.

(3) Bestimmen Sie Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$, die zueinander und zu $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ senkrecht stehen.

(4) Bestimmen Sie (über den Kosinus) den Winkel zwischen

- $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ sowie
- $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$
- $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ sowie
- $\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$

(6 Punkte)

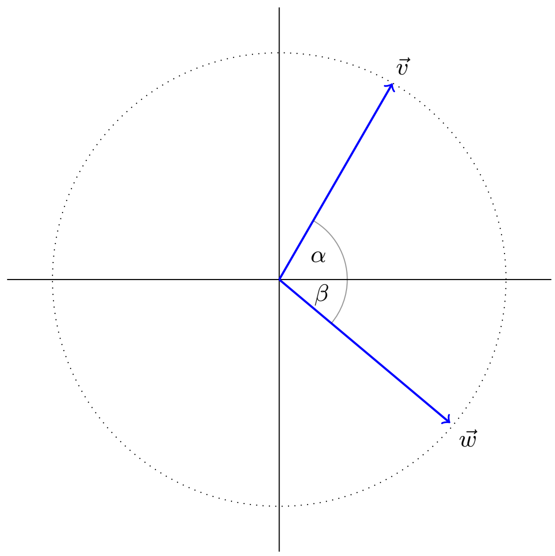
H14: Beweisen Sie Lemma 1.2.8 für das Skalarprodukt $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nämlich dass für alle $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
(2) $(\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$
(3) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{x} = (\vec{v} \cdot \vec{x}) + (\vec{w} \cdot \vec{x})$.

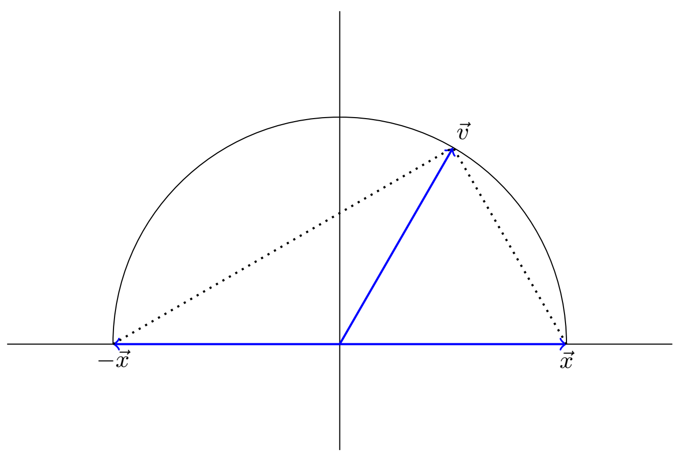
Folgern Sie aus den obigen Rechenregeln, dass $(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})\cdot\vec{x} = \alpha(\vec{v}\cdot\vec{x})+\beta(\vec{w}\cdot\vec{x})$ sowie $\vec{x}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha(\vec{x}\cdot\vec{v}) + \beta(\vec{x}\cdot\vec{w})$ gilt. **(5 Punkte)**

H15: *Geometrische Beweise über das Skalarprodukt.*

(1) Beweisen Sie das Additionstheorem $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ indem Sie den Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ berechnen.



(2) Beweisen Sie den Satz von Thales für einen Halbkreis mit Radius r, indem Sie einen Winkel zwischen geeigneten Vektoren (welchen?) im folgenden Bild mithilfe des Skalarproduktes berechnen.



(2+2 = 4 Punkte)

H16: Zeichnen Sie die Geraden $g\colon 3x - 5y = 15$ und $h = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \mathbb{R}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ in die Ebene, und geben Sie jeweils die fehlende Parameter- oder Koordinatendarstellung an. Bestimmen Sie anschließend den Schnittpunkt von g und h, und den Winkel zwischen den Geraden. **(5 Punkte)**