Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 3

(Abgabe am 23. April 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (23/24. April 2018):

P3: Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5 \in \mathbb{R}^3$. Vervollständigen Sie untenstehende Aussagen, und geben Sie jeweils eine kurze Begründung:

(1) Diese Vektoren erzeugen den $\mathbb{R}^3$ sicher/sicher nicht/möglicherweise nicht.
(2) Sie sind sicher/sicher nicht/möglicherweise linear unabhängig.
(3) Eine Auswahl von drei dieser Vektoren bildet sicher/sicher nicht/möglicherweise eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

P4: Es seien $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ Vektoren in der Ebene. Zeigen Sie: Das von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannte Parallelogramm hat genau Flächeninhalt $v_1w_2 - v_2w_1$. Interpretieren Sie Lemma 1.1.13 in diesem neuen Licht.

Hausaufgaben (Abgabe am 23. April 2018, Besprechung 30. April 2018):

H9: Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie unter genauester Angabe[1] der Rechenregeln aus Lemma 1.1.3 und 1.1.4: *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt stets, dass auch $\alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{y} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$.*
(6 Punkte)

H10: Es seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Differenzen $\vec{w}_1 = \vec{v}_2 \ominus \vec{v}_3$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 \ominus \vec{v}_3$ und $\vec{w}_3 = \vec{v}_1 \ominus \vec{v}_2$ linear abhängig sind. Wie kann man das Ergebnis anschaulich im $\mathbb{R}^3$ deuten?
(3 Punkte)

H11: a) Beweisen Sie, dass $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind.

Tipp: Lemma 1.1.7b).

b) Es seien nun $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^n$ drei unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass dann auch die Vektoren $\vec{w}_1 = \vec{v}_2 \oplus \vec{v}_3$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_3$ und $\vec{w}_3 = \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2$ linear unabhängig sind.

Tipp: Verwenden Sie Lemma 1.1.7b) sowohl für die Annahme als auch die Konklusion. Beginnen Sie dann, indem Sie eine beliebige Linearkombination der Null aus den $\vec{w}_i$ (*Was wollen wir für solche Linearkombinationen zeigen?*) in eine Linearkombination der Null aus den $\vec{v}_i$ (*Was wissen wir über solche Linearkombinationen?*) umwandeln.

c) Wie kann man a) aus b) folgern?

(2+4+1=7 Punkte)

H12: a) Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Aussage 1.1.8 aus der Vorlesung:

Das Tupel $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor $\vec{w} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ *eindeutig* als Linearkombination der $\vec{v}_i$ darstellen lässt.

b) Betrachten Sie $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, und stellen Sie $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ als mindestens zwei verschiedene Linearkombinationen dar. Visualisieren Sie Ihre verschiedenen Linearkombinationen mithife von Vektorpfeilen in der Ebene. **(2+2 = 4 Punkte)**

---

[1] Jedes Gleichheitszeichen muss in dieser Aufgabe begründet werden!