Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 2

(Abgabe am 16. April 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (16/17. April 2018):

P2: Analysieren Sie noch einmal den zweiten Beweis von Satz 1.1.12 und beweisen Sie anschließend, dass je drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ den ganzen Raum aufspannen.

Hausaufgaben (Abgabe am 16. April 2018, Besprechung 23/24. April 2018):

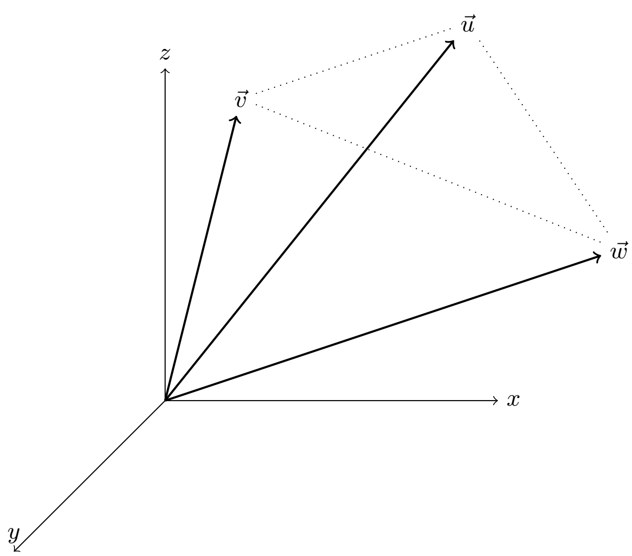
H5: *In den folgenden Teilaufgaben geht es um Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im dreidimensionalen Raum wie in der angegebenen Skizze.*

(1) Stellen Sie die Seitenmittelpunkte des Dreiecks als Linearkombination der jeweiligen Endpunkte dar. Wo liegt der Punkt $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$ in der Abbildung? [Tipp: Können Sie $\vec{x}$ als Linearkombination eines Eckpunktes und seines gegenüberliegenden Seitenmittelpunktes schreiben?]

(2) Unter welchen Bedingungen an λ, μ und $\nu \in \mathbb{R}$ stellen die Vektoren $\lambda\vec{u} \oplus \mu\vec{v} \oplus \nu\vec{w}$ die Ebene dar, die durch die Spitzen von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben ist?

(3) Schraffieren Sie die Pyramide aus Linearkombinationen $\lambda\vec{u} \oplus \mu\vec{v} \oplus \nu\vec{w}$ wobei $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ und $\lambda + \mu + \nu \leq 1$. Liegt der Vektor $\frac{1}{2}\vec{u} \oplus \frac{1}{2}\vec{v} \oplus \frac{1}{2}\vec{w}$ innerhalb oder außerhalb der Pyramide?

(3+1+2 = 6 Punkte)



H6: *In dieser Aufgabe geht es darum, die Menge aller möglichen Linearkombinationen besser kennenzulernen.* Wenn $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Vektoren sind, wie war nochmal die Menge $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ definiert? Was besagt diese Definition in Ihren eigenen Worten?

Betrachte nun die folgenden drei-dimensionalen Vektoren.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie jeweils an (keine Begründung notwendig), ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Geraden, Ebenen, oder der ganze Raum sind.

(1) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
(2) $\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{w} \rangle$
(3) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$
(4) $\langle \vec{w}, \vec{x} \rangle$
(5) $\langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \rangle$
(6) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
(7) $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$
(8) $\langle \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$
(9) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$

In welchen Fällen (1) – (7) sind die angegebenen Vektoren jeweils linear unabhängig? Geben Sie für jeden linear abhängigen Fall eine *nicht-triviale Linearkombination der Null* an.

(3+4 = 7 Punkte)

H7: *Mehr zur linearen Abhängigkeit.*

(1) Gibt es drei linear unabhängige Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^2$?
(2) Finden Sie drei Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, die zwar linear abhängig sind, aber $\vec{v_1} \notin \langle \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle$. Begründen Sie Ihre Antwort.
(3) Finden Finden Sie drei linear abhängige Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, sodass jedes Paar $\vec{v_i}, \vec{v_j}$ linear unabhängig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(3 Punkte)

H8: Vervollständigen Sie den Beweis aus der Vorlesung zu den Rechenregeln der Skalarmultiplikation $\odot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(4 Punkte)

Hinweis: Achten Sie an jeder Stelle in Ihrem Beweis darauf, ob Sie $\oplus$ und $\odot$ oder $+$ und $\cdot$ verwenden, und welche Buchstaben Vektorpfeile über sich haben müssen und welche nicht! Geben Sie auch an, welche Rechenregeln für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Sie benutzen.