Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 13

(Abgabe am 9./10. Juli 2018 in den Tutorien)

Präsenzaufgaben (9./10. Juli 2018):

P18: Benutzen Sie Differenzentabellen, um Summenformeln für

- $1 + 2 + 3 + \ldots + n$,
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, und

zu finden.

Falls noch Zeit ist: Zeigen Sie mithilfe der Differenzentabellen, dass $f_k(0) + f_k(1) + \ldots + f_k(n) = f_{k+1}(n+1)$. Es sei $g(x)$ ein beliebiges Polynom. Wie kann man $\sum_{k=0}^{n} g(k)$ berechnen?

Hausaufgaben (Abgabe am 9. Juli 2018, Besprechung 16. Juli 2018):

H49: Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebig. Aus der Vorlesung wissen wir, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $f \colon V \to W$ gibt mit $f \colon v_i \mapsto w_i$ für alle $i \leq n$.

Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann injektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind.
(2) f ist genau dann surjektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ Erzeugendensystem von W ist.
(3) f ist genau dann bijektiv, wenn $w_1, \ldots, w_n$ Basis von W ist.

Falls eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ bijektiv ist, dann nennt man f einen *Isomorphismus*. Zwei Vektorräume V und W heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt. Zeigen Sie: *Zwei endlich dimensional Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn* $\dim V = \dim W$.

Hinweis: Für die eine Richtung, betrachten Sie nochmal die Korollare zur Dimensionformel. Die andere folgt aus (3). Wie?

(8 Punkte)

H50: Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 3.3.9: Für alle $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\begin{vmatrix} (a+a') & b \\ (c+c') & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} a & (b+b') \\ c & (d+d') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$.

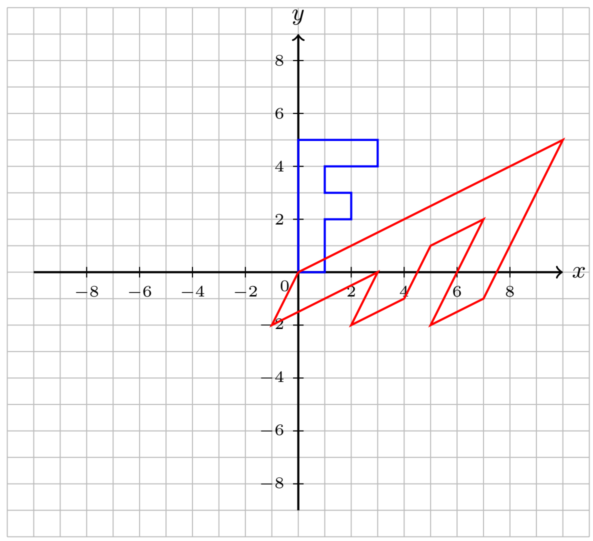
(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$.

(3 Punkte)

H51: Beweisen Sie: In einem Vektorraum der Dimension n lässt sich jede Liste $(u_1, \ldots, u_m)$ linear unabhängige Vektoren zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_{n-m})$ ergänzen. **(4 Punkte)**

Hinweis: Einschmuggellemma.

H52: Bestimmen Sie den Flächeninhalt des roten F's auf zwei verschiedene Weisen: Einmal, indem Sie die Schnürsenkel-Formel anwenden; und einmal, indem Sie Satz 3.3.10 auf die entsprechende Transformationsmatrix aus H47 anwenden. **(5 Punkte)**


y
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8