Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 12
(Abgabe am 2. Juli 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (2./3. Juli 2018):

P17: Berechnen Sie die Darstellungsmatrix der Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die Drehachse $g = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ mit Drehwinkel 90°.

Hausaufgaben (Abgabe am 2. Juli 2018, Besprechung 10./11. Juli 2018):

H45: Zeigen Sie mithilfe der Matrizendarstellungen:

(1) Die Verknüpfung zweier Spiegelungen an Ursprungsgeraden im R^2 ist immer eine Drehung.
(2) Jede Drehung im $\mathbb{R}^2$ ist eine Verknüpfung zweier Spiegelungen an Ursprungsgeraden.
(3) Können Sie für letztere Aussage auch einen alternativen geometrischen Beweis finden?

(3 Punkte)

H46: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ heißt *orthogonal* falls für die Skalarprodukte der Spaltenvektoren gilt

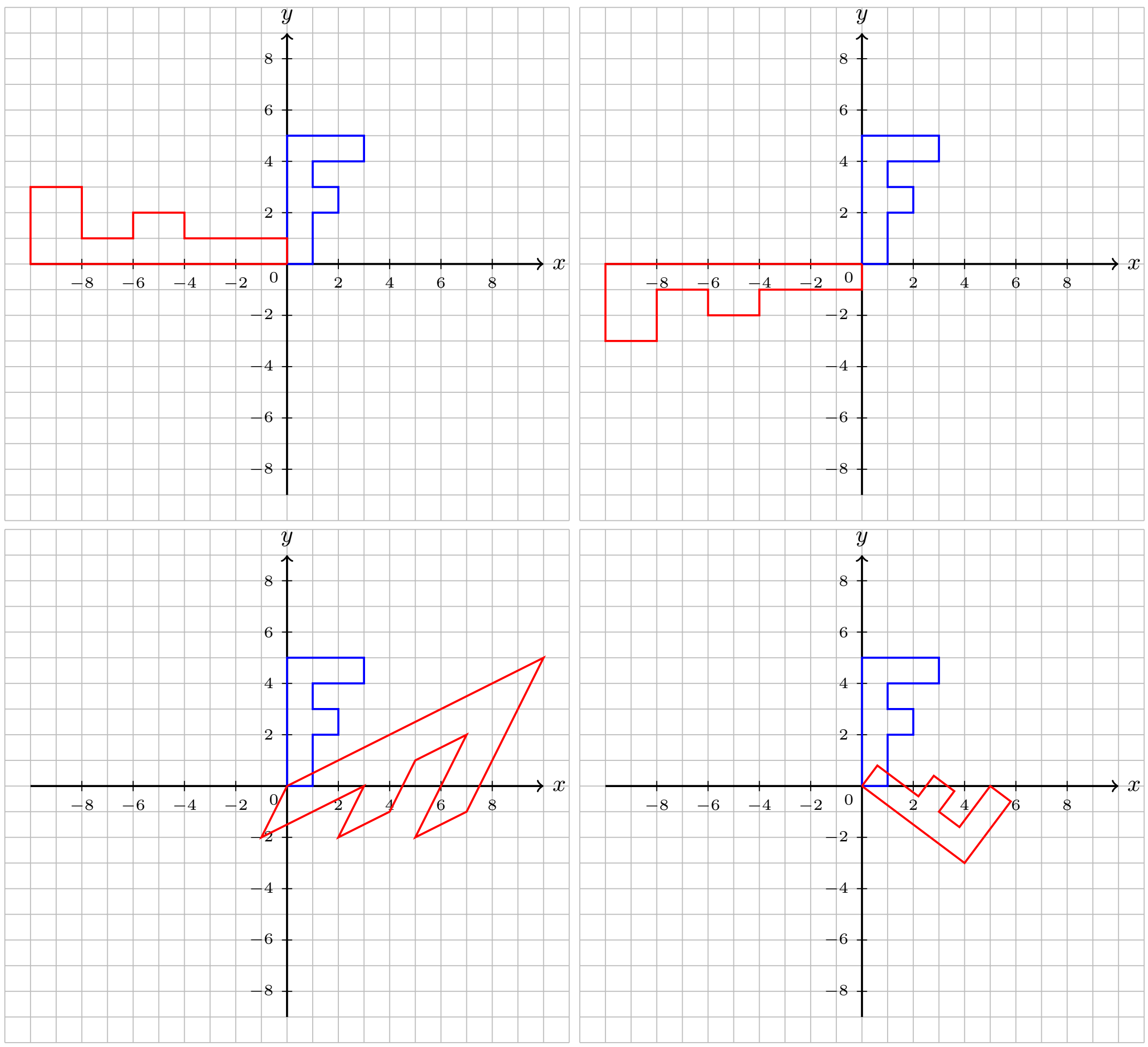
$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

(1) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in R^n$ gilt, dass $(Ax, Ay) = (x, y)$, und schließen Sie, dass jede orthogonale Matrix längen- und winkelerhaltend ist (also dass $||Ax|| = ||x||$ für alle x, und der Winkel zwischen Ax und Ay genau der gleiche Winkel ist wie zwischen x und y).
Tipp: Ax ist eine Linearkombination der Spalten von A. Nutzen Sie die Linearität des Skalarproduktes, Lemma 1.2.8, aus.
(2) Überprüfen Sie, dass Dreh- und Spiegelungsmatrizen im $\mathbb{R}^2$ orthogonal sind.
(3) Zeigen Sie umgekehrt: Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist entweder eine Dreh- oder eine Spiegelungsmatrix.
Tipp: Lemma 1.3.6.

(5 Punkte)

H47:

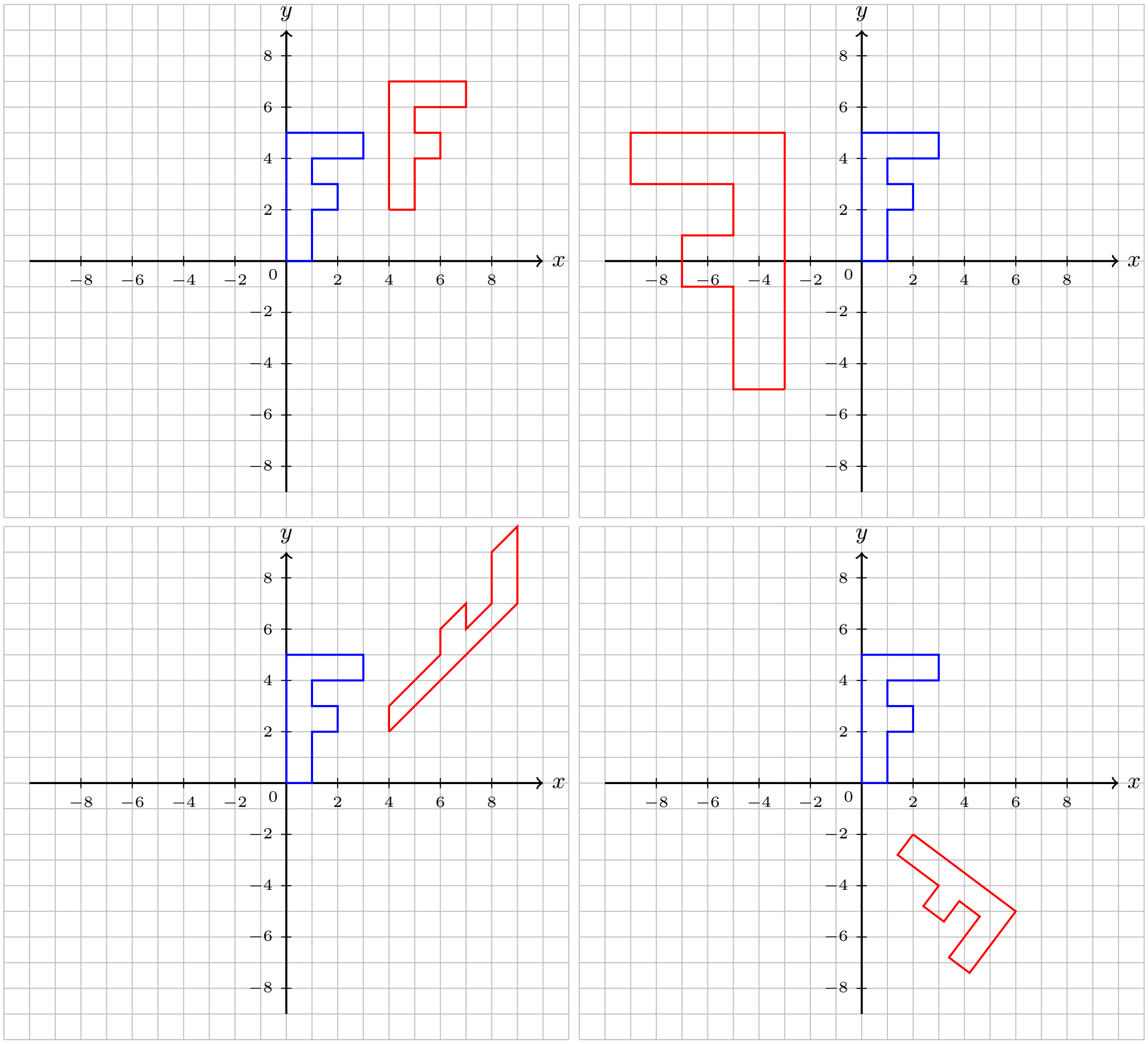
- Finden Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die die folgenden Transformationen vornehmen (das blaue F soll hierbei auf das rote F transformiert werden).



- Lineare Abbildungen haben die Eigenschaft, dass die den Ursprung auf sich selbst abbilden. Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $v_0 \in R^2$ betrachten nun Abbildungen der Form

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto v_0 + Av.$$

Finden Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und Vektoren $v_0 \in \mathbb{R}^2$, die die folgenden Transformationen vornehmen (das blaue F soll hierbei auf das rote F transformiert werden).



(8 Punkte)

H48:

(1) Wir betrachten die eindeutige lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch die Bilder

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}3\\5\\6\end{bmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix C mit $f_C = f$.

Tipp: Lemma 3.3.3.

(2) Es sei $E \subseteq R^3$ eine Ursprungsebene, und $u = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ ein zu E orthogonaler Einheitsvektor.

Zeigen Sie: Die Spiegelung an E ist gegeben durch die Matrix

$$\begin{bmatrix}1-2a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & 1-2c^2\end{bmatrix}.$$

Hinweis Orientieren Sie sich am zweiten Beweis für die Spiegelungsmatrix in einer Ebene in 3.3.7d).

(4 Punkte)

F2 (Freiwillige Rechenübung): Löse für

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & -7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad Vx = 0, \quad Vx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } Vx = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bevor Sie anfangen zu rechnen: Was ist $\dim \operatorname{Bild}(f_A)$? Welche Dimension muss also der Kern von f_A haben? Was kann man schonmal anhand von Satz 3.2.15 alles über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen erkennen?