Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 11

(Abgabe am 25. Juni 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (25./26. Juni 2018):

P15: Zeichnen Sie ein Haus mit Ecken $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ und Dachspitze $(1,3)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix B zur linearen Abbildung f, die durch $e_1 \mapsto e_1 - e_2$ und $e_2 \mapsto e_1 + e_2$ festgelegt ist.

(b) Unterwerfen Sie das Haus der linearen Abbildung f und zeichnen Sie das resultierende Objekt in die bestehende Zeichnung.

(c) Wie verändert sich diedes Hauses, insbesondere die (ebene) Fläche? Welche Fläche hat das Parallelogramm, was von den Spalten von A aufgespannt wird? (Vgl. P4)

(d) Bearbeiten Sie (b) und (c) für die Matrizen $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $E = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$?

P16: Wahr oder falsch?

(a) Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ gilt immer $(AB)^2 = A^2B^2$.

(b) Für lineare Abbildungen f ist stets $\dim \operatorname{Kern} f \leq \dim \operatorname{Bild} f$.

(c) Linear unabhängige Vektoren werden unter linearen Abbildungen stets auf linear unabhängige Vektoren abgebildet.

(d) Die Verkettung zweier Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ ist wieder eine Spiegelung.

Hausaufgaben (Abgabe am 25. Juni 2018, Besprechung 2./3. Juli 2018):

H41: Welche der folgenden Funktionen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort!

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2 - 2x$.

(2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x - 3y$.

(3) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (x+y)^2$.

(4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$.

(5) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto ad - bc$.

(6) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (x, x+y, x+2y, x+3y, x+4y, \ldots)$.

(6 Punkte)

H42: Beweis oder Gegenbeispiel: Es seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sowie $w_1, v_2, \ldots, w_n$ Basen eines K-Vektorraums V. Dann ist auch

(1) $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n,\ v_n$ eine Basis von V.

(2) $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n$ eine Basis von V.

(3) Falls $\lambda \neq 0$, dann ist auch $\lambda v_1,\ \lambda v_2,\ \ldots, \lambda v_n$ eine Basis von V.

(4) Dann ist auch $v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n$ eine Basis von V.

Hinweis: Für Lineare Unabhängigkeit: orientieren Sie sich an H11b). Für Erzeugendensystem: versuchen Sie, mit Dimensionsgründen zu argumentieren (vgl. Korollar 3.1.15).

(4 Punkte)

H43: *Anwendungen der Dimensionsformel für Lineare Abbildungen.*

- Finden Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, so dass $\mathrm{kern}(f) = \mathrm{bild}(f)$.
- Beweisen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ gibt, so dass $\mathrm{kern}(f) = \mathrm{bild}(f)$.

(2+2=4 Punkte)

H44: Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Zeigen Sie:

(1) Wenn $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem für V ist, so ist $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem für $\mathrm{bild}(f)$.

(2) Wenn f injektiv ist und $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig in V sind, dann sind $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig in W.

(3) (Bonuspunkt) Gilt die Aussage immer noch, wenn man auf das injektiv verzichtet?

Hinweis: Für (2): Verwende Lemma 3.2.7(3).

(2+3 =5 Punkte + 1 BP)

F1 (Freiwillige Rechenübung): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und der Vektor} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Was ist $\dim \mathrm{Bild}(f_A)$? Welche Dimension muss also der Kern von f_A haben?

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(c) Geben Sie die gefundene spezielle Lösung $\vec{v}_0$ und die Lösungsmenge L des zugehörigen homogenen Systems an.

(d) Verifizieren Sie alle in 2.3.7 – 2.3.10 gemachten Aussagen aus der Vorlesung am gegebenen Beispiel.