Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
SoSe 2018

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 10

(Abgabe am 18. Juni 2018 vor der Vorlesung)

Präsenzaufgaben (18./19. Juni 2018):

P13: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eindeutig bestimmt ist durch die Bilder der Elemente einer Basis von V. Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f((1,1)) = (3,4)$ und $f((-2,2)) = (2,0)$. Geben Sie eine 2×2-Matrix A an, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $Av = f(v)$ gilt.

> *Hinweis:* Ermitteln Sie zunächst Bilder $f(e_1)$ und $f(e_2)$ der Einheitsvektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ unter der Abbildung f.

P14: Gegeben seien die Spiegelungen σ_1, σ_2 und σ_3 in $\mathbb{R}^2$, an der x-Achse, bzw. an der Geraden $y = x$ bzw. an der Geraden $2y = x$.

(a) Bestimmen Sie Matrixdarstellungen für diese Abbildungen.
(b) Bestimmen Sie die Abbildungen $\sigma_2 \circ \sigma_1$, $\sigma_3 \circ \sigma_2$, $\sigma_3 \circ \sigma_1$ und $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.
(c)* Wie kann man die zugehörigen Umkehrabbildungen bestimmen?

Hausaufgaben (Abgabe am 18. Juni 2018, Besprechung 25./26. Juni 2018):

H37: Es sei V ein K-Vektorraum, und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(1) $U_1 \cap U_2$ ist auch ein Untervektorraum von V.
(2) Finden Sie ein Beispiel mit $V = \mathbb{R}^2$, welches zeigt, dass $U_1 \cup U_2$ nicht notwendigerweise ein Untervektorraum von V sein muss.

(2+2=4 Punkte)

H38: Es sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

(1) Schreiben Sie das Polynom $f = x^2 + 2$ als Linearkombination der Polynome $p_1 = 2x^2 + 3$, $p_2 = x^2 - x + 3$, $p_3 = x - 2$ und $p_4 = 2x^2 + x + 1$.
(2) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des von den Polynomen $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $3x + 1$ und $x^2 - x + 1$ erzeugten Unterraums von $\mathbb{R}[x]$.

(3+3=6 Punkte)

H39: Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y) \mapsto (2x, x+y, x-y) \text{ und } g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) \mapsto (x+y-z, x+y+z, 2z).$$

(a) Beschreiben Sie die Abbildungen mit Matrizen.
(b) Bestimmen Sie eine Matrizendarstellung für $g \circ f$.

(5 Punkte)

H40: In der Vorlesung haben wir die fast-magischen Quadrate besprochen. In dieser Aufgabe soll es um magische 3×3 Quadrate gehen.

(1) Zeigen Sie: Je drei reelle Zahlen a, b, c an den Positionen $\begin{bmatrix} a & & b \\ & c & \\ & & \end{bmatrix}$ lassen sich eindeutig zu einem magischen Quadrat ergänzen.
(2) Geben Sie eine Basis für die magischen 3×3-Quadrate an, und beweisen Sie, dass es sich wirklich um eine Basis handelt.
(3) Was ist also die Dimension der magischen 3×3-Quadrate?

(2+2+1 =5 Punkte)