Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundbildung lineare Algebra und analytische Geometrie

Aufgabenblatt 1

(Abgabe am 9. April 2018)

Präsenzaufgaben (9/10. April 2018):

P1: Gegeben seien die zwölf $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{12}$ Vektoren einer Uhr.

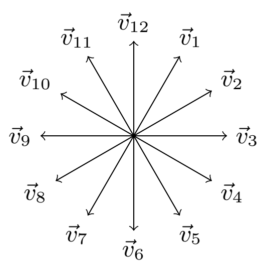
(1) Was ist die Summe der zwölf Vektoren $\vec{w} = \sum_{i=1}^{12} \vec{v}_i$? Welches Rechengesetz für die Vektoraddition $\oplus$ haben Sie hier benutzt?

(2) Was ist die Summe der verbleibenden elf Vektoren, wenn der Vektor $\vec{v}_4$ nach 4 Uhr herausgenommen wird?

(3) Nehmen wir an, der $\vec{v}_1$ sei nun halbiert, also nur noch halb so lang wie alle anderen Vektoren. Was ist dann die Summe über alle zwölf Vektoren?

(4) Es sei $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ die Summe der ersten 6 Vektoren, also $\vec{x} = \sum_{i=1}^{6} \vec{v}_i$. Bestimmen Sie x_2.

(5) Was ist x_1 (sagen wir, die Uhr hat Radius 1)?



Hausaufgaben (Abgabe am 9. April 2018, Besprechung 16/17. April 2018):

H1: Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben über zwei-dimensionale Vektoren.

(1) Zeichen Sie die Vektoren $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} \oplus \vec{w}$, $\ominus \vec{w}$ und $\vec{v} \ominus \vec{w}$ gemeinsam in die Euklidische Ebene.

(2) Zeichnen Sie die 15 Vektoren $\lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit $\lambda = -2, 1, 0, 1, 2$ und $\mu = 0, 1, 2$ in die Ebene.

(3) Berechnen und zeichnen Sie die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ für welche die Formeln $\vec{v} \oplus \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v} \ominus \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ gelten.

(1+2+3=6 Punkte)

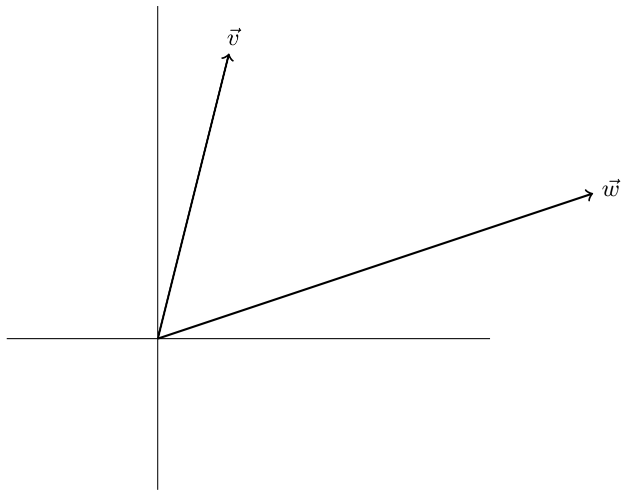
H2: Betrachten Sie zwei nicht-parallele Vektoren $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ im ersten Quadranten wie im Bild unten (wenn es Ihnen hilft, legen Sie konkrete, realistische Zahlen für v_1, v_2, w_1, w_2 fest).

(1) Zeichnen Sie die Punkte $\frac{1}{2}\vec{v} \oplus \frac{1}{2}\vec{w}$, $\frac{1}{4}\vec{v} \oplus \frac{3}{4}\vec{w}$, $\frac{1}{4}\vec{v} \oplus \frac{1}{4}\vec{w}$, sowie $\vec{v} \oplus \vec{w}$ ein.

(2) Markieren Sie die Punkte $2\vec{v} \ominus \vec{w}$, $\ominus\vec{v} \oplus 2\vec{w}$ und einer weiteren Linearkombination $\lambda\vec{v} \oplus \mu\vec{w}$ mit $\lambda + \mu = 1$. Zeichnen Sie die Gerade aller Punkte $\lambda\vec{v} \oplus \mu\vec{w}$ mit $\lambda + \mu = 1$. Markieren Sie die dann Strecke aller Punkte $\lambda\vec{v} \oplus \mu\vec{w}$ mit $\lambda + \mu = 1$ und $\lambda, \mu \geq 0$.

(3) Markieren Sie die Punkte $\frac{1}{3}\vec{v} \oplus \frac{1}{3}\vec{w}$ und $\frac{2}{3}\vec{v} \oplus \frac{2}{3}\vec{w}$. Welchen Strahl erzeugen die Linearkombinationen $\lambda\vec{v} \oplus \lambda\vec{w}$ für $\lambda \geq 0$?

(1+2+3 = 6 Punkte)



H3: Wenn ein Parallelogram die drei Ecken $(1,1)$, $(4,2)$ und $(1,3)$ besitzt, welche möglichen vierten Ecken gibt es? Versuchen Sie Ihre Antwort genau zu begründen. Zeichnen Sie mindestens zwei der möglichen Ecken. (Bonus: Wie kann man die neuen Ecken elegant als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ausdrücken?)

(3 Punkte + 2 Bonus)

H4: Vervollständigen Sie den Beweis aus der Vorlesung, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(5 Punkte)

Hinweis: Achten Sie an jeder Stelle in Ihrem Beweis darauf, ob Sie $\oplus$ oder $+$ verwenden, und welche Buchstaben Vektorpfeile über sich haben müssen und welche nicht!