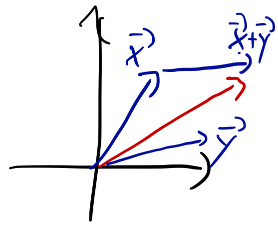
Lemma 1.2.9 (Eigenschaften der Norm / des Betrags)

a) $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

b) $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \ \forall \lambda$ (Linearität)

c) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. (Dreiecksungleichung)

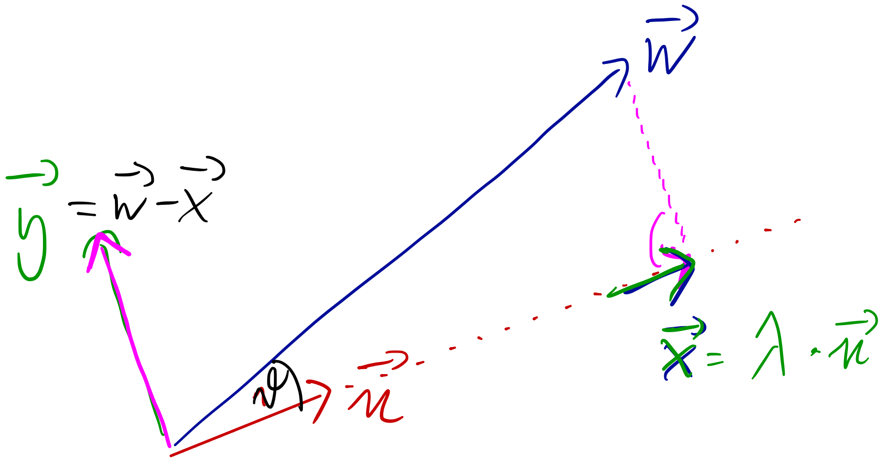
"Diagonale ist kürzer als die zwei Seiten"



__Bew__: a)+b) klar. c) kommt gleich. $\square$

__Geometrische Anschauung__:

Angenommen, $\vec{u}$ ist ein Einheitsvektor. $\|\vec{u}\| = 1$



Gesucht ist λ so dass $\vec{x}$ gerade der Lotpunkt ist.

$$\Leftrightarrow \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 \overset{!}{=} \|w\|^2$$ (Nach Umkehrung des Satzes von Pythagoras)

$$\|x\|^2 + \|\vec{w} - \vec{x}\|^2 = \|x\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 - 2(\vec{w} \cdot \vec{x})$$

$$= 2\|x\|^2 + \|w\|^2 - 2(\vec{w} \cdot (\lambda \vec{u}))$$

$\downarrow$ 1.2.9.b)

$$= 2 \cdot \lambda^2 + \|w\|^2 - 2\lambda(\vec{w}, \vec{u}) \overset{!}{=} \|w\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \lambda^2 = 2\lambda(\vec{w}, \vec{u})$$

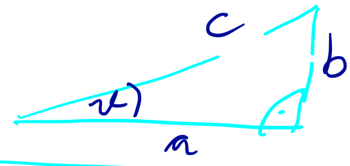
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = (\vec{w}, \vec{u}). \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$\square$

Satz 1.2.10: Für Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist der Punkt $\vec{x} := \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})}{\|v\|^2} \cdot \vec{v}$ die Projektion von $\vec{w}$ auf Gerade $\mathbb{R} \cdot \vec{v}$, und für den ungerichteten Winkel ϑ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt gerade

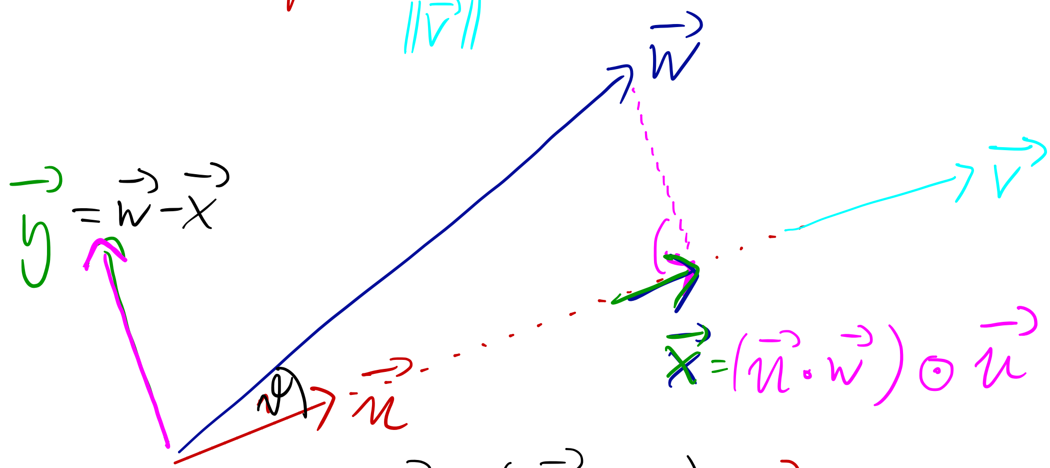
$$\cos\vartheta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

Cosinussatz:



$a = \cos\vartheta \cdot c$
$b = \sin\vartheta \cdot c$

Bew: Normiere $\vec{n} := \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.



$$\rightsquigarrow \quad \vec{x} = \left(\frac{\vec{v}}{\|v\|} \cdot \vec{w}\right) \cdot \vec{n}$$

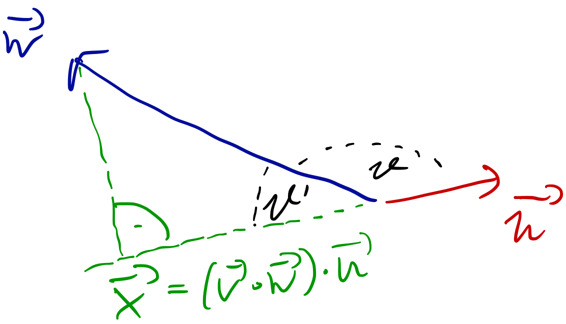
Fallunterscheidung: (1) $\vec{v} \cdot \vec{w} \geq 0$.

$$\Rightarrow \|\vec{x}\| = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})}{\|v\|} = \cos\vartheta \cdot \|w\|$$

Cosinus Satz

$$\Rightarrow \quad \cos\vartheta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|v\| \cdot \|w\|}. \qquad \square$$

(2) $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$



Dann $\vec{v}' := -\vec{v}$.

$\Rightarrow \quad \vec{v}' \cdot \vec{w} > 0$

$$\Rightarrow \cos\vartheta' = \frac{\vec{v}' \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}'\| \, \|\vec{w}\|} \quad \Rightarrow \vartheta = 180° - \vartheta'$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = -\cos\vartheta' = \frac{-(\vec{v}' \cdot \vec{w})}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

$$= \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}. \qquad \square$$