Bsp 3.1.8: Die Matrizen $a, b, \dots, e$ bilden eine Basis der Fast-magischen Quadrate.

Lsg.:

Erzeugendensystem:

Bsp 3.1.9 Die Fibonacci-Folge.

P10: $F = \{ a = (a_0, a_1, \dots) : a_{n+2} \overset{(*)}{=} a_n + a_{n+1} \} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist ein Untervektorraum der Folgen.

Fibonacci-Folge $a = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots) \in F$.

Frage: Finde eine Fkt $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = a_n$

Aus den Grundlagen (HA W5) wissen wir:
$f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$. Die Folge wird also exponentiell größer.

Raten: $f(n) = x^n$ für eine geeignete Zahl $x \in \mathbb{R}$.

Wenn $(x^0, x^1, x^2, x^3, \dots) \in F$ sein soll, muss

$$x^{n+2} = x^n + x^{n+1} \quad \text{gelten} \quad \Big| : x^n$$

$$x^2 = 1 + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Schreibe $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\gamma = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

<u>Dann</u>: Haben wir zwei Folgen gefunden:

$$b = (\beta^0, \beta^1, \beta^2, \dots) \in F$$
$$= (1, \beta, \beta^2, \dots)$$

$$c = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots) \in F$$
$$= (1, \gamma, \gamma^2, \dots)$$

<u>Beobachtung</u>: (b,c) sind linear unabhängig:

Wenn $\lambda b + \mu c = 0$

$$\Rightarrow (\underbrace{\lambda+\mu}, \underbrace{\lambda\beta + \mu\cdot\gamma}, \lambda\beta^2+\mu\gamma^2, \dots)$$

$\Rightarrow \lambda = -\mu$ $\quad\lambda(\beta-\gamma) = 0$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \neq 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 0.$$

Also sind b, c eine Basis von F!

$$\langle b,c \rangle = F \ni a,$$

Also muss es λ, μ geben mit
$$\lambda b + \mu \cdot c = a$$

$\Longleftrightarrow$

$$(\lambda+\mu,\ \lambda\beta+\mu\cdot\gamma,\ \lambda\beta^2+\mu\cdot\gamma^2, \dots) = (1,\ 1,\ 2, \dots)$$

LGS: $\mathrm{I}\quad \lambda+\mu = 1$

$\mathrm{II}\quad \lambda\beta+\mu\cdot\gamma = 1$

$\mathrm{II} \sim \beta\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \qquad \beta\cdot\mu-\mu\cdot\gamma = \beta-1$

$$\Longrightarrow \mu = \frac{\beta-1}{\beta-\gamma}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1-\mu = 1-\frac{\beta-1}{\beta-\gamma} = \frac{\beta-\gamma-\beta+1}{\beta-\gamma} = \frac{1-\gamma}{\beta-\gamma}$$

$$\Rightarrow a_n = \lambda\cdot\beta^n+\mu\cdot\gamma^n = \frac{1-\gamma}{\beta-\gamma}\beta^n+\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}\gamma^n$$

Bem: $\beta-\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$\beta-1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}-1 = -\gamma$

$1-\gamma = 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} = +\beta$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(+\beta\cdot\beta^n-\gamma\cdot\gamma^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\beta^{n+1}-\gamma^{n+1}\right)$$