Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 9

(Abgabe am 13. Dezember 2017)

Präsenzaufgaben (11/12. Dezember 2017):

P19: Für $a, b \in \mathbb{N}_0$ sagt man: „a teilt b“, wenn es ein $q \in \mathbb{N}_0$ gibt, mit $b = qa$. Schreibweise: $a|b$.

(a) Prüfen Sie ob $3|1002$, $11|122$, $13|2015$, $a|a$, $a|0$, $0|a$.
(b) Gilt $a|b$ und $b|c$, dann gilt auch $a|c$. (Man sagt ,,|” ist *transitiv.*)
(c) Gilt $a|b$ und $b|a$, dann gilt $a = b$. (Man sagt ,,|” ist *anti-symmetrisch.*)

P20: Die Zahl $a = \sum_{i=0}^{r} z_i \cdot 10^i$ sei im Dezimalsystem dargestellt, wobei die $z_i \in \{0, \ldots, 9\}$ die „Ziffern“ sind.

(a) Addieren Sie 989 und 2112 schriftlich und begründen Sie, warum dabei das richtige Ergebnis herauskommt.
(b) Zeigen Sie
- $2|a \iff 2|z_0$,
- $5|a \iff 5|z_0$,
- $4|a \iff 4|(z_1 \cdot 10 + z_0)$,
- $3|a \iff 3|\sum_{i=0}^{r} z_i$.

Hausaufgaben (Abgabe 13. Dezember 2017, Besprechung 18./19. Dezember 2017):

H31: Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
(2) $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ ist stets durch 7 teilbar. **(3+3= 6 Punkte)**

H32: Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2^n > n^3$? Testen Sie die Fälle $n = 1, \ldots, 12$, stellen Sie eine Vermutung auf, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Hinweis: Begründen Sie zunächst $n \geq 5 \Rightarrow n > 3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$

(4 Punkte)

H33: Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie (vgl. (4.26) und (4.27) im Skript)

(a) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.
(b) Aus $a \leq b$ folgt $ac \leq bc$.
(c) Aus $a < b$ und $c \neq 0$ folgt $ac < bc$.
(d) Aus $ac = bc$ und $c \neq 0$ folgt $a = b$.

(4 Punkte)

H34: *g-adische Arithmetik*

(a) Schreiben Sie die Dezimalzahl 2017 im Binär- und im 17er System. (Im 17er-System verwende man die ,,Ziffern”

$$\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F, G\}$$

wobei A bis G jeweils die Werte 10 bis 16 darstellen).
(b) Berechnen Sie ohne Rückgriff auf das Dezimalsystem $(257)_8 + (12)_8$ und $(257)_8 \cdot (12)_8$.
(c) Für welche Basis $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $(576)_g + (331)_g = (1127)_g$?

(6 Punkte)