Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 7

(Abgabe am 29. November 2017)

Präsenzaufgaben (27/28.November 2017):

P15: Wir betrachten die Aussageform $A(n) = (1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \ = \ n^2)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(1) Formulieren Sie die Aussageform mithilfe des Summenzeichens Σ.
(2) Beweisen Sie $\forall n \in \mathbb{N}(A(n))$.
(3) Finden Sie eine geometrische Interpretation dieser Formel.

P16: (PA) Beweisen Sie, dass $7 + 4 = 11$ sowie dass $2 \cdot 2 = 4$.

Hinweis: Die Abkürzung (PA) hinter einer Aufgabe soll bedeuten, dass Sie in dieser Aufgabe jede Argumentation streng auf den Peano Axiomen (bzw. den Resultaten der Vorlesung aus Kapitel 4) aufbauen sollen.

Hausaufgaben (Abgabe 29. November 2017, Besprechung 4./5. Dezember 2017):

H24: Es sei $M = \{a \colon \mathbb{N} \to \{0,1\} : a \text{ ist eine Folge}\}$ die Menge der Binärfolgen. Um zu zeigen, dass $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |M|$ hatten wir in der Vorlesung eine Funktion definiert

$$f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to M, \ X \mapsto a = a_1 a_2 a_3 \ldots \quad \text{wobei} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in X, \\ 0 & \text{falls } n \notin X. \end{cases}$$

(1) Es sei $2\mathbb{N}$ die Menge der geraden Zahlen, P die Menge der Primzahlen, sowie Q die Menge der Quadratzahlen. Was ist jeweils der Wert dieser Mengen unter der Abbildung f? (Keine Begründung notwendig!)
(2) Welche Teilmenge $X \subseteq \mathbb{N}$ wird unter f auf die Folge $1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,\ldots$ abgebildet? (Keine Begründung notwendig!)
(3) Beweisen Sie, dass f bijektiv ist, und folgern Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

(2 + 3 = 5 Punkte)

H25: Beweisen Sie, dass es in Hilberts Hotel überabzählbar viele Möglichkeiten gibt, eine neue Zimmerverteilung für die anwesenden Gäste festzulegen. **(1 + 3 = 4 Punkte)**

Tipp: Begründen Sie zuerst, dass jede Zimmerverteilung dargestellt werden kann als eine *injektive* Folge $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei a_n das neue Zimmer des $n$ten Gastes bezeichnen soll.

H26: Beweisen Sie mitfilfe des *Beweisschemas zur vollständigen Induktion* für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1))$.
(2) $n^3 - n$ ist stets durch 3 teilbar. **(3 + 3 = 6 Punkte)**

Anleitung: Formulieren Sie zuerst eine passende Aussageform $A(n)$, und führen Sie dann jeweils die Schritte IA, IV und IS durch.

H27: (PA) Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem 4.9: Zeigen Sie, dass

(1) $\forall m \in \mathbb{N}_0(m + 1 = 1 + m)$.
(3) $\forall a, b \in \mathbb{N}_0((a + b = 0) \Rightarrow (a = 0 \wedge b = 0))$. **(2 + 3 = 5 Punkte)**

Tipp: Für (3) führen Sie am besten einen *Kontrapositionsbeweis*, also zeigen Sie, dass $((a \neq 0 \vee b \neq 0) \Rightarrow (a + b \neq 0))$ (Genaue Begründung: Warum geht / reicht das?) Benutzen Sie dann Theorem 4.3.

************ freiwillige Aufgaben ************

F2: Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Alle Aussagen unten sind wahr. Für jede Aussage, die Sie beweisen können, gibt's einen Bonuspunkt zu gewinnen

(1) $\vec{f}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ ist genau dann injektiv, wenn $f\colon X \to Y$ injektiv ist,
(2) $\vec{f}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ ist genau dann surjektiv, wenn $f\colon X \to Y$ surjektiv ist.
(3) $\overleftarrow{f}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ ist genau dann injektiv, wenn $f\colon X \to Y$ surjektiv ist,
(4) $\overleftarrow{f}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ ist genau dann surjektiv, wenn $f\colon X \to Y$ injektiv ist.

(4 Bonuspunkte.)

Tipp: Für "genau dann, wenn" Aussagen beweist man am besten beide Richtungen separat. Für (1) zeige man zum Beispiel zuerst: *angenommen, dass $\vec{f}$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv*, und anschließend, *angenommen, dass f injektiv ist, dann ist auch $\vec{f}$ injektiv.*

Kommentar: Gerade wenn Sie Probleme mit den letzten Teilen der Hausaufgabe H17 auf dem vorletzten Blatt hatten (seien Sie beruhigt: Sie waren damit nicht alleine!), schnappen Sie sich einen Komilitonen / eine Komilitonin und versuchen Sie sich zumindest an einer oder zwei dieser Aufgaben. Schreiben Sie zuerst ganz präzise auf, was man eigentlich für injektiv und surjektiv zeigen muss – dann ist der Rest meistens gar nicht mehr so schwer.