Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 6

(Abgabe am 22. November 2017)

Präsenzaufgaben (20/21.November 2017):

P13: Wahr oder falsch?

- Es gibt eine bijektive Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.
- Es gibt eine bijektive Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Es gibt eine bijektive Abbildung $(-1,1) \to \mathbb{R}$ (wobei $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ das Interval aller reellen Zahlen zwischen -1 und 1 bezeichnet).

P14: Es sei M die Menge aller möglichen deutschen Sätze. Ist M abzählbar?

Hausaufgaben (Abgabe 22. November 2017, Besprechung 27./28. November 2017):

H20: Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Folgeglieder a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 mit einem Taschenrechner oder von Hand. Was fällt Ihnen auf? Stellen Sie eine Vermutung auf, wie die Folgeglieder a_n sich verhalten.
(b) Untersuchen Sie die Folge $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right)$ mit einer Tabellenkalkulation (Excel, Numbers oder Google Sheets, siehe Screenshot unten). Wählen Sie verschiedene Werte für x, darunter $x = 2$, $x = 625$ und einer mindestens 10-stellig Zahl Ihrer Wahl.
(c) Können Sie Ihre Vermutung durch eine geeignete Rechnung (neue Spalte in der Tabelle) bestärken?
(d) Untersuchen Sie was passiert, wenn Sie den Startwert a_1 ändern, z.B. 0, oder eine negative Zahl.
(e) Angenommen, die Zahl $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt die Gleichung $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)$. Was können Sie über a sagen? **(7 Punkte)**

Hinweis: Bitte fertigen Sie einen Ausdruck Ihrer Tabellenkalkulation an, und fügen Sie dann Ihre Erklärungen bei.

H21: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Finden Sie eine (möglichst einfache) Bijektion $f\colon [0,1] \to [a,b]$ mit der Eigenschaft $f(0) = a$ und $f(1) = b$. (**Tipp:** Versuchen Sie es mit einer Geradengleichung).

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $a = -1$ und $b = 3$.
(b) Beweisen Sie, das Ihre gefundene Abbildung wirklich bijektiv ist.
(c) Die Intervalle $[0,1]$ und $[a,b]$ sind gleichmächtig.
(d) Je zwei reelle Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$ sind gleichmächtig. **(7 Punkte)**

H22:

(1) Warum kann man mit der Beweisidee von Cantors Theorem 3.37 nicht analog beweisen, dass $\mathbb{Q}$ nicht abzählbar ist (Genauer: An welcher Stelle scheitert der analoge Beweisversuch?)
(2) Beweisen Sie, dass es überabzählbar viele Folgen $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt.

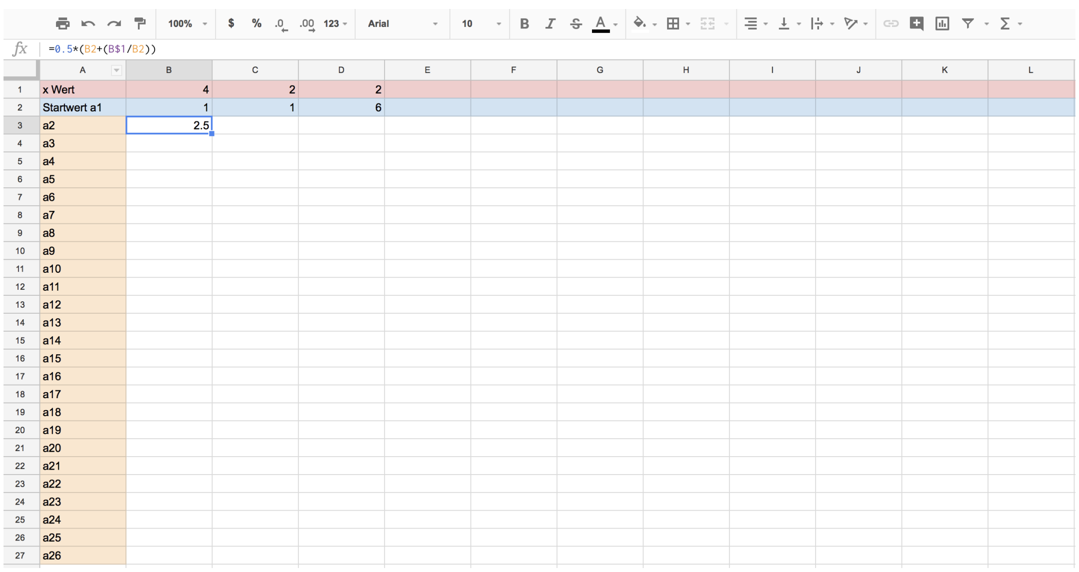
(2 + 4 = 6 Punkte)

H23: (Bonusaufgabe)

(a) Nach dem Erfolg des ersten Hilbert Hotels entscheidet sich das Management von Hilbert Hotel Inc. ein neues, noch größeres Hotel zu bauen, in dem es ein Zimmer für jede reelle Zahl $0 < x < 1$ gibt. Natürlich ist es sofort ausgebucht, und alle Zimmer sind belegt. Am nächsten Morgen stehen zwei neue Gäste vor der Tür. Welche Ansage könnte das Management machen, um die zwei neuen Gäste unterzubringen?

(b) Beweisen Sie, dass die reellen Intervalle $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ und $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ gleichmächtig sind. **(2 Bonuspunkte)**

************ Beispiel Screenshot für die Tabellenkalkulation ************



fx =0.5*(B2+(B$1/B2))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x Wert	4	2	2								
2	Startwert a1	1	1	6								
3	a2	2.5										
4	a3											
5	a4											
6	a5											
7	a6											
8	a7											
9	a8											
10	a9											
11	a10											
12	a11											
13	a12											
14	a13											
15	a14											
16	a15											
17	a16											
18	a17											
19	a18											
20	a19											
21	a20											
22	a21											
23	a22											
24	a23											
25	a24											
26	a25											
27	a26											