Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

**Grundlagen der Mathematik**

**Aufgabenblatt 5**

*(Abgabe am 15. November 2017)*

**Präsenzaufgaben (13/14.November 2017):**

**P11:** Es seien $f, g, h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Funktionen mit den Abbildungsvorschriften $f(n) = n^2$, $g(n) = 2n + 5$ sowie $h(n) = n + 2$.

(1) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
- $f$ ist nicht injektiv,
- $g$ ist injektiv,
- $g$ ist nicht surjektiv,
- $h$ ist surjektiv.

(2) Ist eine der Funktionen bijektiv? Ist eine der Funktionen weder injektiv noch bijektiv?

**P12:** Betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ n \mapsto \big((n-2)^2, n^2\big)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) $f$ ist injektiv.
(2) $f$ ist surjektiv.

**Hausaufgaben (Abgabe 15. November 2017, Besprechung 20./21. November 2017):**

**H17:** Wir betrachten die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$ sowie die Abbildung $f\colon A \to B$, die durch folgende Wertetabelle gegeben ist:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $b$ | $a$ | $c$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ | $a$ |

(1) Skizzieren Sie das zugehörige Pfeildiagramm sowie den Graph der Funktion $f$.
(2) Geben Sie die Werte der Teilmengen $A_1 = \{1, 2, 3\}$ und $A_2 = \{2, 3, 5\}$ von $A$ unter der Bildfunktion $\vec{f}\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ an.
(3) Geben Sie die Werte der Teilmengen $B_1 = \{a, b\}$ und $B_2 = \{a, c\}$ von $B$ unter der Urbildfunktion $\overleftarrow{f}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ an.
(4) Ist $f$ injektiv? Ist $f$ surjektiv?
(5) Ist $\vec{f}$ injektiv? Ist $\vec{f}$ surjektiv?
(6) Ist $\overleftarrow{f}$ injektiv? Ist $\overleftarrow{f}$ surjektiv? **(1+1+1+2+2+2 =9 Punkte)**

**H18:** Es seien $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f(x) = 2x,\ \text{sowie}\ g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{wenn } x \geq 0 \\ -2x & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

(1) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen. Stellen Sie anhand Ihrer Skizzen Vermutungen auf, ob die Funktionen jeweils injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Beweisen Sie anschließend Ihre Vermutung.
(2) Dieselbe Aufgabenstellung, aber diesmal für die Funktionen $\hat{f}, \hat{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit denselben Abbildungsvorschriften wie oben (aber anderen Definitions-/Wertebereichen!). **(2+2=4 Punkte)**

**H19:**

(1) Skizzieren Sie die Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Abbildungsvorschriften $f(x) = 2x - 6$ und $g(x) = x^3 + 2$. Gesucht sind die zugehörigen Umkehrfunktionen sowie $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ sowie $g \circ f$. **(1+2+4=7 Punkte)**

(2) Es seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Muss dann $f$ injektiv sein? Surjektiv? Bijektiv? **(2 Bonuspunkte)**

************ freiwillige Aufgaben ************

**F1:** Betrachte die Mengen $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $B = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$.

(1) Wie viele Funktionen $f\colon A \to B$ gibt es?
(2) Wie viele bijektive Funktionen $f\colon A \to B$ gibt es?
(3) Wie viele injektive Funktionen $f\colon A \to B$ gibt es?
(4) Zeigen Sie, dass es für $n = 6$ und $m = 4$ genau 1560 viele surjektive Funktionen $f\colon A \to B$ gibt. **(0 Punkte)**