Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 4

(Abgabe am 8. November 2017)

Präsenzaufgaben (6/7.November 2017):

P8: Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die die Zahl 21 teilen? Wie viele, die 66 teilen? Wie viele, die 510 teilen? Was für Regelmäßigkeiten erkennen Sie? Kann man die jeweiligen Teiler sinnvoll wie in einem Hasse-Diagramm anordnen? Können Sie eine allgemeingültige Regel für die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ finden?

P9: Betrachte $f_1 = \{(x, 3x-1) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f_2 = \big\{(x, x^2 - 2x) : x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (Begründung?).

(a) Skizzieren Sie die Mengen!
(b) Entscheiden Sie, ob es sich jeweils um Funktionen handelt.
(c) Sind die Mengen $\hat{f}_i := \big\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in f_i\big\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Funktionen?

P10: Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$. Was ist $\overleftarrow{f}(\{0\})$ und $\overleftarrow{f}([0,1])$? Was ist $\overleftarrow{f}(\vec{f}(\{0\}))$, $\overleftarrow{f}(\vec{f}([-\pi, \pi]))$ und $\vec{f}(\overleftarrow{f}(\mathbb{R}))$? Veranschaulichen Sie Ihre Behauptungen in einer Skizze.

Hausaufgaben (Abgabe 8. November 2017, Besprechung 13./14. November 2017):

H12: Fertigen Sie eine schriftliche, genau begründete Lösung zur Präsenzaufgabe P7 vom letzten Zettel an:

Skizzieren Sie die Menge $\big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 = y\big\}$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Betrachte die Aussageform $A(x, y) = \big(x^2 \geq y\big)$ mit Variablenbereichen $\mathcal{W}(x) = \mathbb{R}$ und $\mathcal{W}(y) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(1) Färben Sie in Ihrer Skizze alle Zahlenpaare (a, b), für die die Aussage $A(a, b)$ wahr ist.
(2) Was bedeuten die Aussageformen $A_1(y) = \forall x \in \mathbb{R}(A(x, y))$ sowie $A_2(x) = \exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\neg A(x, y))$ anschaulich in Ihrer Skizze? Entscheiden Sie, ob die Aussagen $A_1(0)$ und $A_1(1)$, $A_2(0)$ und $A_2(1)$ wahr oder falsch sind. Was ist mit den Aussagen $\exists! y \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\forall x \in \mathbb{R}(A(x, y)))$ und $\forall x \in \mathbb{R}(\exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\neg A(x, y)))$?
(3) Interpretieren Sie die Aussagen $\forall x \in \mathbb{R}\big(\forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0}\big((x^2 = 2y) \Rightarrow A(x, y)\big)\big)$ und $\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0}((\cos x = y) \Rightarrow A(x, y)))$ in Ihrer Skizze. Sind die Aussagen wahr oder falsch? **(1+1+4+2=8 Punkte)**

H13: Es sei $M = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Keine Begründung notwendig.)

- $1 \in M$
- $1 \subseteq M$
- $\{1\} \in M$
- $\{1\} \subseteq M$
- $\{\{1\}\} \in M$
- $\{\{1\}\} \subseteq M$
- $\emptyset \in M$
- $\emptyset \subseteq M$
- $\{\emptyset\} \in M$
- $\{\emptyset\} \subseteq M$
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq M$

(3 Punkte)

H14: Wie viele Elemente hat die Menge $M = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))$? Listen Sie alle Elemente der Menge M auf. Wie viele Elemente hat die Menge $M' = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))))$? Begründen Sie Ihre Antwort! Vergleichen Sie Ihre Antwort mit der Anzahl der Atome im Universum. **(1+1+2=4 Punkte)**

H15: Vollenden Sie die folgenden Teile im Beweis von Theorem 3.12: Es sei $f\colon A \to B$ eine Funktion, $A_1, A_2 \subseteq A$ und $B_1 \subseteq B$.

(2) Beweisen Sie, dass $\vec{f}(A_1 \cap A_2) \subseteq \vec{f}(A_1) \cap \vec{f}(A_2)$, und finden Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass nicht immer Gleichheit gilt.

(5) Finden Sie jeweils mindestens zwei unterschiedliche Beispiele, dass $A_1 \subsetneq \overleftarrow{f}(\vec{f}(A_1))$ und $\vec{f}(\overleftarrow{f}(B_1)) \subsetneq B_1$ gelten kann. **(3+2=5 Punkte)**

H16: (*Bonusaufgabe*) Fertigen Sie eine Übersicht zu Mengen, Aussagen und Funktionen an! Regeln:

- Maximal 1 Din A4 Seite, einseitig beschrieben; keine super-kleine Handschrift.
- Wählen Sie sorgfältig aus, was Sie aufschreiben wollen. Ein paar Definitionen; vielleicht ein paar Beispiele/Nicht-Beispiele, anhand deren man Definitionen illustrieren kann? Die nach Ihrer Meinung wichtigsten Resultate? Die Kunst ist, alles unwichtige wegzulassen!
- Versuchen Sie Zusammenhänge herauszuarbeiten. ZB: Ein Funktionsgraph kann als Bsp dienen für Teilmenge, kartesische Produkte, Funktionen, Aussagen ($\exists!$ in Def $3.2'$) und so weiter.

(Diese Übersicht darf dann später im ersten Kurztest benutzt werden.) **(3 Punkte)**