Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

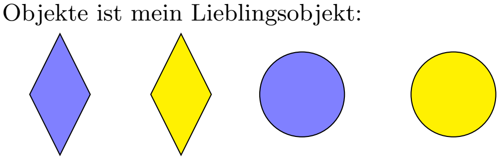
Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 3

(Abgabe am 1. November 2017)

Präsenzaufgaben (30. Oktober 2017):

P6: Eines der folgenden Objekte ist mein Lieblingsobjekt:



Wenn ein Objekt dieselbe Farbe, oder dieselbe Form wie mein Lieblingsobjekt hat (oder beides), dann *akzeptiere* ich es — andernfalls *lehne ich es ab*.

Ich akzeptiere den blauen Diamanten. Können Sie etwas über meine Akzeptanz oder Ablehnung der anderen drei Objekte folgern? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Wahrheitstafel!

P7: Skizzieren Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \colon x^2 = y\}$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Betrachte die Aussageform $A(x,y) = (x^2 \geq y)$ mit Variablenbereichen $\mathcal{W}(x) = \mathbb{R}$ und $\mathcal{W}(y) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(1) Färben Sie in Ihrer Skizze alle Zahlenpaare (a,b), für die die Aussage $A(a,b)$ wahr ist.

(2) Was bedeuten die Aussageformen $A_1(y) = \forall x \in \mathbb{R}(A(x,y))$ sowie $A_2(x) = \exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\neg A(x,y))$ anschaulich in Ihrer Skizze? Entscheiden Sie, ob die Aussagen $A_1(0)$ und $A_1(1)$, $A_2(0)$ und $A_2(1)$ wahr oder falsch sind. Was ist mit den Aussagen $\exists! y \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\forall x \in \mathbb{R}(A(x,y)))$ und $\forall x \in \mathbb{R}(\exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\neg A(x,y)))$?

(3) Interpretieren Sie die Aussagen $\forall x \in \mathbb{R}\big(\forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0}\big((x^2 = 2y) \Rightarrow A(x,y)\big)\big)$ und $\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0}((\cos x = y) \Rightarrow A(x,y)))$ in Ihrer Skizze. Sind die Aussagen wahr oder falsch?

Hausaufgaben (Abgabe 1. November 2017, Besprechung 6./7. November 2017):

H7: Es seien $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x + 2y = 6\}$ und $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x + y = 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen L_1, L_2 sowie die Menge $L_1 \cap L_2$ in ein Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie die Elemente der Menge $L_1 \cap L_2$. Stimmt das mit Ihrer Skizze überein?

(c) Skizzieren Sie die Mengen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x + 2y \leq 6\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x + y < 1\}$$

und

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x + 2y \leq 6\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x + y < 1\}.$$

(2+1+2=5 Punkte)

H8: Es seien $A, B \subseteq M$ Mengen. Veranschaulichen Sie anhand eines Venn Diagramms die Rechengesetze von *de Morgan*

(1) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, sowie

(2) $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$.

Führen Sie einen formalen Beweis für beide Aussagen, indem Sie jeweils separat sowohl $\subseteq$ und $\supseteq$ für beiden Gleichungen begründen. **(1+2+2=5 Punkte)**

Bonusteil: Können Sie ähnliche Formeln für das Komplement des Schnittes / der Vereinigung von drei oder mehr Mengen finden? **(1 Punkt)**

H9: Für Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sei $A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ die Menge aller Summen, die man aus je einem Element von A und einem aus B bilden kann.

(1) Betrachte $3\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \colon n = 3m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$, und $2\mathbb{N}$ die Menge der geraden Zahlen. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ die Gleichheit $A = 3\mathbb{N} + 2\mathbb{N}$ gilt, und beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie $A \subseteq 3\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$ wie auch $A \supseteq 3\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$ zeigen.

(2) Man finde eine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $(A + A) \cap A = \emptyset$.

(3+1=4 Punkte)

H10: Formulieren Sie die folgenden Aussagen jeweils formal mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Junktoren und Quantoren, und entscheiden Sie, welche dieser Aussagen wahr und welche falsch sind:

- Für jede natürliche Zahl x und jede natürliche Zahl z gibt es eine natürliche Zahl y mit $x = y + z$.
- Für jede natürliche Zahl $x > 1$ gibt es eine natürliche Zahl y und eine natürliche Zahl z, so dass $x = y + z$.
- Für jede natürliche Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die echt kleiner ist.

Formulieren Sie auch die Negationen dieser Aussagen formal und in natürlicher Sprache (ohne das Zeichen '$\neg$' bzw. das Wort 'nicht' zu verwenden). **(3+3=6 Punkte)**

H11: (*Bonusaufgabe*). Es seien $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots \subseteq M$ Mengen. Betrachten sie nacheinander die Venn Diagramme für $A_1 \subseteq M$, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $A_1, A_2, A_3 \subseteq M$. In wie viele Regionen wird die 'Fläche' M jeweils geteilt? Stellen Sie eine Vermutung auf, wie viele Regionen man für das Venn Diagramm für n Mengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$ braucht, und begründen Sie Ihre Vermutung. Zeichnen Sie ein möglichst übersichtliches Venn Diagramm für $A_1, \ldots, A_4 \subseteq M$ und für $A_1, \ldots, A_5 \subseteq M$ (und vergewissern Sie sich, dass Sie die vorhergesagte Anzahl an Regionen erhalten!). **(3 Punkte)**