Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 2

(Abgabe am 25. Oktober 2017
bei Frau Kortmann, Raum 229, 9-11Uhr)

Präsenzaufgaben (23./24. Oktober 2017):

P4: Zeigen Sie, dass man ein $2^n \times 2^n$ Schachbrett, aus dem ein *beliebiges* Feld herausgenommen wurde, überschneidungsfrei mit Kacheln der Form überdecken kann.

P5: Zeigen Sie, dass man ein $2^n \times 2^n$ Schachbrett, aus dem ein *beliebiges* schwarzes und ein *beliebiges* weißes Feld herausgenommen wurden, überschneidungsfrei mit Dominosteinen der Form überdecken kann.

Hausaufgaben (Abgabe 25. Oktober 2017, Besprechung 30. Oktober 2017):

H3: Auf einem $n \times n$ Schachbrett liegt eine Münze auf dem linken unterem Feld. In einem Zug darf man die Münze von ihrem Feld in eines der diagonal angrenzenden Felder verschieben (die Münze bewegt sich also wie ein lahmer Läufer). Das Spiel ist gewonnen, wenn die Münze nach endlich vielen Zügen auf dem rechten unteren Feld liegt. Probieren Sie für $n \leq 8$, ob Sie das Spiel gewinnen können. Stellen Sie eine Vermutung auf, für genau welche natürlichen Zahlen n das Spiel zu gewinnen ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung! (Achtung: Sie müssen auch beweisen, dass für die anderen n das Spiel nicht zu gewinnen ist.) **(1+1+4=6 Punkte)**

H4: Auf einem $n \times n$ Schachbrett liegt eine Münze auf dem linken unterem Feld. In einem Zug darf man die Münze von ihrem Feld in eines der parallel angrenzenden Felder verschieben (wie ein lahmer Turm). Das Ziel des Spiels ist es, eine Zugfolge zu finden, so dass die Münze jedes Feld genau einmal besucht, und zum Schluss auf dem rechten oberen Feld liegt. Probieren Sie für $n \leq 8$, ob Sie das Spiel gewinnen können. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche natürlichen Zahlen genau das Spiel zu gewinnen ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung! (Achtung: Sie müssen auch beweisen, dass für die anderen n das Spiel nicht zu gewinnen ist.) **(1+1+4=6 Punkte)**

H5: Ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $n = 0$ an der Position $0 \in \mathbb{Z}$. In jedem Schritt zerfällt das Teilchen in zwei Teilchen, die in entgegengesetzte Richtungen auseinanderfliegen und im Abstand 1 vom ursprünglichen Teilchen (also auf Position $\pm 1 \in \mathbb{Z}$) anhalten. Im nächsten Schritt zerfallen diese beiden Teilchen, emittieren jeweils zwei neue Teilchen, die wiederum in entgegengesetzte Richtungen auseinanderfliegen und im Abstand 1 vom Punkt ihres Zerfalls anhalten, usw. Wann immer zwei Teilchen in diesem Prozess aufeinander treffen, vernichten sie sich gegenseitig (und vollständig). Fertigen Sie eine Skizze an (am besten auf Karopapier, querformat) von den ersten 32 Konfigurationen (untereinander, beginnend mit $n = 0$). Zeigen Sie, dass es zu jedem Zeitpunkt $n = 2^k$ genau 2 Teilchen gibt. **(2+3=5 Punkte)**

H6: Betrachten Sie das Pascalsche Dreieck. Markieren Sie alle ungeraden Zahlen. Was hat das mit der vorherigen Aufgabe zu tun? Begründen Sie möglichst prägnant, warum in jeder 2^kten Zeile alle Einträge bis auf die zwei Einsen gerade sind. **(2+1 = 3 Punkte)**

Wie viele ungeraden Zahlen gibt es in der $2^k + 2^m$ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (für $k > m$)? Können Sie eine Formel finden für die Anzahl der ungeraden Zahlen der $n$ten Zeile des Pascalschen Dreiecks? **(2 + 2 Bonuspunkte)**