Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 12

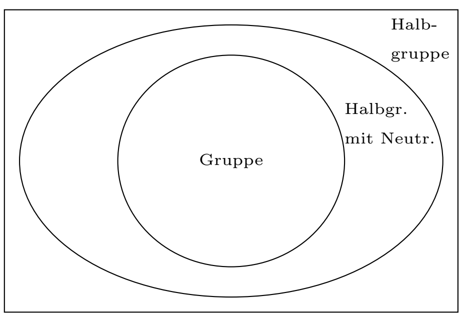
(Abgabe am 24. Januar 2018)

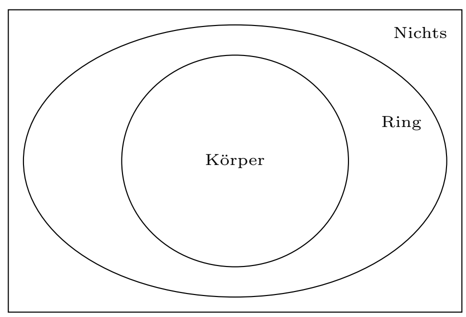
Präsenzaufgaben (22/23. Januar 2018):

P27: Zeigen Sie – anschaulich am Bild mit den Ursprungsgeraden, sowie formal –, dass die Anordnung auf $(\mathbb{Q}, <)$ *dicht* ist: für je zwei rationale Zahlen $x < y$ existiert eine weitere rationale Zahl z mit $x < z < y$.

P28: Sortieren Sie die folgenden Strukturen optimal in die untenstehende Diagramme ein.

- $(\mathbb{N}_0, +)$
- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, +)$
- $(\mathbb{Q}, -)$
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \div)$
- $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$
- $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$
- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, -, \cdot)$
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, \div)$
- $(\mathbb{N}_0/{\sim_{12}}, \oplus, \otimes)$
- $(\mathbb{N}_0/{\sim_{13}}, \oplus, \otimes)$
- $(\mathbb{N}_0/{\sim_2}, \ominus, \otimes)$





Hausaufgaben (Abgabe 24. Januar 2018, Besprechung 29/30. Januar 2018):

H44: Es sei $(H, *)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element und $a \in H$ invertierbar. Zeigen Sie mithilfe des Assoziativgesetzes, dass das inverse Element von a eindeutig bestimmt ist.

(2 Punkte)

> *Hinweis:* Die Kürzregel dürfen Sie an dieser Stelle noch nicht benutzen, da wir die Kürzregel in der Vorlesung als Konsequenz der Eindeutigkeit des Inversen abgeleitet haben.

H45: Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.17 und zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \odot)$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $\underline{1}$ ist. Zeigen Sie anschließend, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ die Distributivgesetze gelten, also dass

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \quad \text{und} \quad x \odot (y \ominus z) = (x \odot y) \ominus (x \odot z).$$

(9 Punkte)

H46: Sind die folgenden "Funktionen"wohldefiniert? Beweis oder Gegenbeispiel!

(1) $f_1 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ [(a, b)] \mapsto [(b, a)]$.
(2) $f_2 \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ ([(a, b)], [(c, d)]) \mapsto [(ac, bd)]$.
(3) $f_3 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \frac{a}{b} \mapsto \frac{a+3b}{2}$.
(4) $f_4 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \frac{a}{b} \mapsto \frac{b}{a}$.

(5) $f_5 \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{a^2d+abc}{b^2d}$.
Hinweis: $f \colon A \to B$ ist eine Funktion, wenn *jedem* $a \in A$ genau *ein* Wert $f(a) \in B$ zugeordnet wird. Für jeden Kandidaten f_i müssen Sie also zwei Dinge überprüfen: Erstens, ob wirklich jedem Element des Definitionsbereiches ein Wert im Wertevorrat zugeordnet wird. Und zweitens, ob dieser Wert jeweils eindeutig ist, zB wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ zwei verschiedene Darstellungen desselben Bruchs sind, gilt dann auch $f_3(\frac{a}{b}) = f_3(\frac{c}{d})$?

(9 Punkte)

H47: (Bonusaufgabe) Aus der Vorlesung wissen wir, dass $(\mathbb{N}_0/{\sim_{13}}, \oplus, \odot)$, also die Restklassen modulo 13, einen Körper bilden. Dieser Körper wird auch F_{13} genannt, denn er hat 13 Elemente. Wir wissen, dass jede Gleichung der Form $ax + b = c$ (für $a \neq 0$) in einem Körper eine eindeutige Lösung hat. Was ist die Lösung zu

$$(\overline{6} \odot x) \oplus \overline{3} = \overline{11}$$

in F_{13}?

(2 Bonus)

H48: Am Mittwoch, den 24. Januar, findet der letzte Kurztest statt. Wie immer dürfen Sie einen einseitig beschriebenen Din-A4 Spickzettel zu den Themen *Elementare Zahlentheorie* und *Die ganzen Zahlen* vorbereiten.

(0 Punkte)