Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 11
(Abgabe am 17. Januar 2018)

Präsenzaufgaben (15/14. Januar 2018):

P25: Seien a, b, c, d Elemente einer Gruppe $(G, *)$. Im folgenden schreiben wir auch ab statt $a * b$.

- Erläutern Sie kurz die Gleichung $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- Wir lautet die entsprechende Formel für $(abc)^{-1}$ und $(abcd)^{-1}$?
- Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:
$$a^{-1}(bd^{-1})^{-1}bc\big(b^{-1}cdc\big)^{-1}ab^{-1}.$$
- Kann man den Ausdruck weiter vereinfachen, wenn man annimmt, dass G abelsch ist?

P26: Verifizieren Sie die folgenden Vorzeichenregeln für $\mathbb{Z}$:

- $\underline{-n} \oplus \underline{-m} = \underline{-(n+m)}$,
- $\underline{n} \odot \underline{-m} = \underline{-(n \cdot m)}$, sowie
- $\underline{-n} \odot \underline{-m} = \underline{n \cdot m}$.

Hausaufgaben (Abgabe 17. Januar 2018, Besprechung 22/23. Januar 2018):

H39: Es sei p eine Primzahl, und $a, b \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie: für alle $0 < k < p$ gilt $p | \binom{p}{k}$.
(2) Folgern Sie, dass $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.
(3) Beweisen Sie nochmal den kleinen Satz von Fermat, indem Sie die Aussage
$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } n^p \equiv n \pmod p$$
mittels einer Induktion beweisen.

(3+1+2= 6 Punkte)

Tipp: Verwenden Sie für (1) die Formel aus der ersten Vorlesung $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

H40: Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$, dass
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

(2 Punkte)

H41: Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(1) Für jeden gemeinsamen Teiler t von a und b gilt $t | \operatorname{ggT}(a, b)$.
(2) Für jedes gemeinsame Vielfache c von a und b gilt $\operatorname{kgV}(a, b) | c$. **(4 Punkte)**

H42: Es sei $a = 202.300$ und $b = 30.294$. Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ einmal mithilfe der Primfaktorzerlegung und einmal mithilfe des Euklidischen Algorithmus. Für welche ganze Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ gilt $ua + vb = \mathrm{ggT}(a, b)$? **(5 Punkte)**

H43: Vollenden Sie den Beweis von Satz 7.9 und zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

transitiv ist. **(3 Punkte)**