Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

Grundlagen der Mathematik

Aufgabenblatt 10

(Abgabe am 20. Dezember 2017)

Präsenzaufgaben (18/19. Dezember 2017):

P21: Wahr oder falsch?

(1) $177 \equiv 18 \pmod 5$
(2) $2^{2017} \equiv 51 \pmod 2$
(3) 2^{2016} endet auf der Ziffer 6.
(4) $2^{10\,105} - 1$ ist eine Primzahl.

P22: Wir untersuchen die Relation $a \equiv b \pmod 7$ auf $\mathbb{N}_0$.

(a) Bestimmen Sie für alle $a \in \{0,1,6,7,8\}$ die Mengen $\overline{a} := \{x \in \mathbb{N}_0 \colon a \equiv x \pmod 7\}$.
(b) Seien $u \in \overline{1}$ und $v \in \overline{6}$, was können Sie über $u+v$ und uv aussagen?
(c) Bestimmen Sie zu $a \in \{1,2,3,4,5,6\}$ jeweils ein Element $b \in \mathbb{N}_0$ mit $ab \equiv 1 \pmod 7$.

Hausaufgaben (Abgabe 20. Dezember 2017, Besprechung 8./9. Januar 2018):

H35: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

(1) Es sei $a \geq -1$. Man beweise für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(1+a)^n \geq 1+na$.
(2) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$
(3) (Bonus) Können Sie die letzte Aussage sowie Ihren Beweis auch mithilfe des Summensymbols $\sum$ aufschreiben?
(4) (Bonus) Wie kann man aus (2) leicht die Aussagen aus den Hausaufgaben H1 und H2 folgern?

Tipp: Tipp für (2): Beweisen Sie zuerst zum Beispiel $\left(\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2\right)\cdot(a+b) = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$ *ohne* konkrete Zahlen für z.B. $\binom{3}{1}$ einzusetzen. Übertragen Sie Ihre Erkenntnisse auf den allgemeinen Fall $n \mapsto n+1$.

Für den Beweis in (3) ist eventuell der Index-Shift

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k$$

nützlich (Begründung?)

(3+3= 6 Punkte + 3 Bonus)

H36: Beweisen Sie für $a, b, c, d, u, v \in \mathbb{N}_0$ folgende Teilaussagen aus Satz 6.2 der Vorlesung:

(3) Aus $a|b$ und $c|d$ folgt $ac|bd$.
(4) Aus $ac|bc$ und $c \neq 0$ folgt $a|b$.
(5) Aus $a|b$ und $a|c$ folgt $a|ub+vc$.
(6) Aus $a|b$ und $a|c$ mit $c \geq b$ folgt $a|c-b$. **(5 Punkte)**

H37: Beweisen Sie Satz 6.3 aus der Vorlesung: *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat mindestens einen Primteiler* auf zwei unterschiedliche Weisen:

(1) Indem Sie den kleinsten Teiler von n betrachten, der > 1 ist. (Existenz?)
(2) Indem Sie den kleinsten Verbrecher n betrachten, für den die Aussage falsch sein könnte.

(2+2 =4 Punkte)

H38: In einem Buch steht folgende Aussage für eine Zahl $n = \sum_{i=0}^{r} z_i \cdot 10^i,\ z_i \in \{0, \ldots, 9\}$:

$$7|n \iff 7 \left| \left(\sum_{i=1}^{r} z_i \cdot 10^{i-1} - 2z_0 \right) \right. \qquad (\star)$$

(a) Prüfen Sie die Aussage $(\star)$ für die Zahlen 56, 91, 111, 581.
(b) Wie kann man für die Zahlen 607 138 und 453 571 leicht prüfen ob sie durch 7 teilbar sind?
(c) Beschreiben Sie eine Methode — basierend auf der Aussage $(\star)$ — mit der man Teilbarkeit durch 7 testen kann.
(d) (Bonus) Beweisen Sie die Aussage $(\star)$! (**Tipp:** Wie kann man die Zahl n ausdrücken in Abhängigkeit von $a = \sum_{i=1}^{r} z_i \cdot 10^{i-1} - 2z_0$?)

(5 Punkte + 2 Bonus)