Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Max Pitz
WS 2017/18

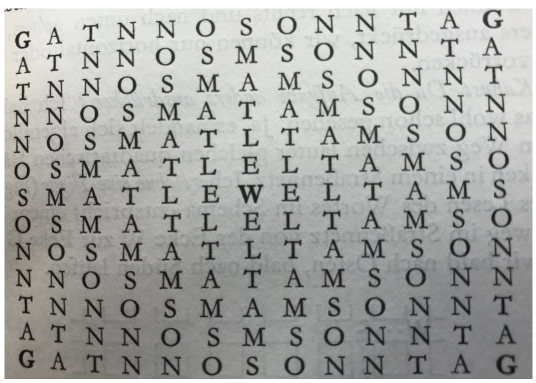
Grundlagen der Mathematik

Weihnachtszettel

(Abgabe am 10. Januar 2017)

Bearbeiten Sie über die nächsten drei Wochen so viele Aufgaben, wie Sie wollen, die Aufgaben W4 und W5 sind aber fast Pflichtprogramm (und nicht schwer!). Die erreichten Punkte werden Ihnen als Bonuspunkte gutgeschrieben. Das Grundlagen Team wünscht frohe Weihnachten!

W1: Auf wie viele Weisen kann man im folgenden Bild „Welt am Sonntag" buchstabieren, wenn man von jedem Buchstaben nur zu angrenzenden Buchstaben gehen darf?



(2 Bonuspunkte)

W2: Es sei $M = \{a\colon \mathbb{N} \to \{0,1\} : a \text{ Folge}\}$ die Menge der Binärfolgen, und $N = \{b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} : b \text{ Folge}\}$ die Menge der natürlichen Folgen. Betrachte die Abbildung

$$f\colon M \to N,\ a \mapsto f(a) = b_1, b_2, b_3, \ldots \quad \text{wobei } b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(a) Was ist jeweils der Wert der Binärfolgen $1,1,1,1,1,\ldots$ und $1,0,1,0,1,0,1,\ldots$ unter der Abbildung f?

(b) Welche Binärfolge wird unter f auf die Folge $1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,\ldots$ abgebildet?

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung f injektiv ist. Ist f surjektiv? **(2 Bonuspunkte)**

W3: Beweisen Sie: Es gibt überabzählbar viele Bijektionen $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(3 Bonuspunkte)

Anleitung: Angenommen, $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \ldots$ sei eine Auflistung aller Bijektionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wir müssen eine Folge $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstruieren, die (1) von jedem $a^{(i)}$ (an mindestens einer Stelle) abweicht, und die (2) selbst bijektiv ist.[1] Man konstruiere zuerst eine injektive Folge $b'\colon 2\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, so dass b' von $a^{(i)}$ an der jeweils $2i$-ten Stelle abweicht. Wie kann man dann b' zu einer bijektiven Folge $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ modifizieren?

[1] Eigenschaft (2) ist ausschlaggebend: Wir wollen ja sagen, dass wir b in unserer Liste vergessen hatten. Wenn b nicht bijektiv wäre, dann funktioniert dieses Argument nicht mehr.

W4: Berechnen Sie den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = ?$$

für $n = 1, 2, 3, 4$ (als Bruch, nicht mit dem Taschenrechner), stellen Sie eine Vermutung für eine allgemeine Formel auf, und beweisen Sie Ihre Vermutung mit Induktion. **(2 Bonuspunkte)**

W5: Es bezeichne $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Folge der Fibonacci Zahlen, also $f_1 = f_2 = 1$, sowie $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ für alle $n \geq 3$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$.

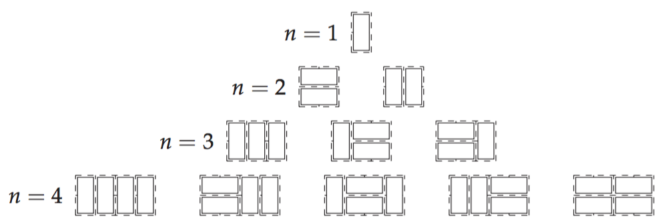
(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

(3) $f_n \geq (\frac{3}{2})^{n-2}$.

Hinweis: Für (3): Testen Sie die Aussage per Hand für $n = 1, 2$. Betrachten Sie dann den kleinsten Verbrecher.

(3 Bonuspunkte)

W6: Auf wie viele Arten kann man ein Rechteck der Größe $2 \times n$ mit Dominosteinen der Größe 1×2 pflastern? Die ersten Fälle gehen wie folgt:



Wenn a_n die Anzahl der Pflasterungen bezeichnet, so gilt also

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	2	3	5	?	?	?	?

Testen Sie die nächsten offenen Fälle in der Tabelle bis Sie ein Muster sehen: Wie kann man a_{n+1} aus den vorherigen a_k $(1 \leq k \leq n)$ berechnen? Stellen Sie also eine Rekursiongleichung auf, und begründen Sie, warum diese Rekursion das korrekte Ergebnis liefert. **(3 Bonuspunkte)**

W7: Beweisen Sie, dass für jedes $n > 2$ eine Primzahl p mit $n < p < n!$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst noch einmal den Beweis aus der Vorlesung, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(2 Bonuspunkte)

W8: Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik hat n eine eindeutige Primzahlzerlegung

$$n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m}$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{P}$ verschiedene Primzahlen sind und $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \leq m$. Es bezeichne $T(n) = \{t \in \mathbb{N} \colon t|n\}$ die Menge aller Teiler von n. Zeigen Sie für die Anzahl der Teiler von n:

$$|T(n)| = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_m + 1).$$

(3 Bonuspunkte)

Hinweis: Es sei $N_i = \{0, 1, \ldots, n_i\}$ und $M = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_m$ die Menge aller m-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ wobei $a_i \in N_i$. Finden Sie eine Bijektion $f\colon M \to T(n)$.

W9: *Rechnen mit Kongruenzen.*

(1) Es sei $k = 2^{2018} + 2018^2$. Zeigen Sie, dass $k^2 + 2^k$ auf der Ziffer 0 ended.

(2) Was ist $3^{31} \pmod 7$, $29^{22} \pmod{11}$, sowie $128^{129} \pmod{17}$? (Tipp: Kleiner Satz von Fermat)

(3) Was ist $2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + 5^{50} + 6^{60} \pmod 7$?

(4) In den 60er Jahren haben drei Mathematiker natürliche Zahlen gefunden mit

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5,$$

was eine alte Vermutung des Mathematikers Leonhard Euler widerlegt hat. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben (oder verwenden Sie eine eigene Methode) um herauszufinden, was n sein muss.

- Begründen Sie, dass $n > 133$ und dass n gerade sein muss.
- Zeigen Sie, dass $n \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 5)$ und $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 3)$.
- Welche Möglichkeiten ergeben sich für n aus den bisherigen Erkenntnissen?
- Zeigen Sie, dass n nicht allzu groß sein kann [eventuell helfen die folgenden Tipps:
  (a) $84^5 + 27^5 \leq (84 + 27)^5$,
  (b) $3 \cdot 133^5 = \left(\sqrt[5]{3} \cdot 133\right)^5$.]
- Welche einzige Möglichkeit bleibt für n?

(4 Bonuspunkte)