Graphentheorie I

Übungsblatt 9

1. Beweisen Sie ohne Proposition D4.3.1 (E5.3.1), dass $\chi'(G) = k$ gilt für jeden k–regulären bipartiten Graphen.

2. Finden Sie ein Beispiel für einen bipartiten Graphen dessen listenchromatische Zahl echt größer ist als seine chromatische Zahl. Finden Sie sogar unendlich viele solche?

3$^+$. Beweisen Sie $ch(K_2^r) = r$. (Tip: Induktion nach r)

Wie in der schriftlichen Aufgabe vom letzten Übungblatt bezeichne P_G das chromatische Polynom eines Graphen G.

4. (i) Zeigen Sie, für $n \geq 3$, $P_{C^n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

(ii) Bestimmen Sie P_{W_n}, wobei W_n den Graphen $C^n * K^1$ bezeichne (das *Rad* mit n *Speichen*).

5$^+$. Bestimmen Sie die Klasse aller Graphen G mit $P_G(k) = k\,(k-1)^{|G|-1}$.

6. Hat jeder orientierte Graph einen Kern? Wenn nicht, besitzt jeder Graph eine Orientierung, in der jeder Untergraph einen Kern hat? Wenn nicht, besitzt zumindest jeder Graph eine Orientierung, die selbst einen Kern hat?

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 04. Juni, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7. Es sei G ein Graph. Eine Orientierung O von G ist *azyklisch*, wenn der zu O gehörige gerichtete Graph keinen gerichteten Kreis enthält. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller azyklischen Orientierungen von G genau $|P_G(-1)|$ entspricht.

Hinweise

2. $K_{n,n}$. Um n so zu wählen, dass $K_{n,n}$ nicht einmal k-listenfärbbar ist, betrachte Listen aus k-elementigen Teilmengen einer k^2-elementigen Menge.

3. Damit der Induktionsschritt glatt durchgeht, sollte es möglich sein, ein Paar Ecken und nur eine Farbe aus den Listen der anderen Ecken zu löschen. Was können wir über die Listen sagen, wenn das unmöglich ist? Diese Information allein wird es uns ermöglichen, den Graphen zu färben, ohne ihn auch nur noch einmal anzuschauen.

4. (i) Induktion nach n. (ii) Wie setzt sich W_n zusammen?

5. Um herauszufinden, ob der Graph zusammenhängend ist, betrachte man die Vielfachheit von Nullstellen.

6. Für die erste Frage versuche, einen orientierten Graphen ohne Kern induktiv Kante um Kante zu basteln. Für die zweite und dritte ist die einführende Diskussion zum Begriff des Kerns im Text relevant.

7. Induktion nach $||G||$. Machen Sie sich klar, dass $|P_G(-1)| = (-1)^{|G|} P_G(-1)$ gilt. Gibt es zu gegebener Kante $e \in E(G)$ einen Zusammenhang zwischen der Anzahl azyklischer Orientierungen der Graphen G, $G - e$ und G/e?