Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 8

1. Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende Graph G mit höchstens $|G| + 2$ Kanten plättbar ist. Finden Sie für jedes $n \geq 6$ einen Graphen G mit $|G| = n$, der bezeugt, dass diese Schranke optimal ist.

2. Ein Graph heißt *outerplanar*, wenn er eine Zeichnung besitzt, bei der alle Ecken auf dem Rand eines Außengebietes liegen. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann outerplanar ist, wenn er weder K^4 noch $K_{2,3}$ als Minor enthält.

3. (a) Zeigen Sie, dass es für jeden Graphen G eine geeignete Aufzählung seiner Eckenmenge gibt, so dass der Greedy–Algorithmus mit $\chi(G)$ Farben auskommt.
(b) Finden Sie einen bipartiten Graphen mit einer Eckenaufzählung, so dass der Greedy–Algorithmus 2019 Farben benötigt.

4. Zeigen Sie, dass hinreichend hoher Durchschnittsgrad eine beliebig hohe Reihenzahl erzwingt, nicht jedoch eine beliebig hohe chromatische Zahl.

5. Es sei G ein Graph mit $\chi(G) = k \in \mathbb{N}$. (a) Man zeige, dass G eine Orientierung hat, in der kein gerichteter Weg mehr als k Ecken hat. (b) Es sei nun $c\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ eine beliebige Eckenfärbung. Gibt es immer einen Weg $P = v_1 v_2 \ldots v_k$ mit $c(v_i) = i$?

Die folgende Aufgabe ist schriftlich (alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen) vor Beginn der Vorlesung am 28. Mai abzugeben:

6. Für einen Graphen G und $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_G(k)$ die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen $V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ von G. Zeige, dass P_G ein Polynom in k vom Grad $n := |G|$ ist, bei dem k^n den Koeffizienten 1 hat und k^{n-1} den Koeffizienten $-||G||$. (Man nennt P_G das *chromatische Polynom* von G).

(Tipp: Induktion nach $||G||$.)

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 28. Mai, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7. Führe den Satz von Brooks auf den Fall zurück, dass G 2-zusammenhängend und $\Delta(G) \geq 3$ ist. Beweise diesen Fall dann anhand der folgenden Hilfsaussagen:

(i) Gibt es zwei Kanten $v_1v_n, v_2v_n \in E(G)$ mit $v_1v_2 \notin E(G)$, so dass $G - v_1 - v_2$ zusammenhängend ist, so existiert eine Eckenaufzählung $v_1, \ldots, v_n$ von G so dass jedes v_i $(i < n)$ einen Nachbarn v_j mit $j > i$ besitzt.

(ii) In (i) benötigt der Greedy-Algorithmus $\leq \Delta(G)$ Farben.

(iii) Ist G nicht vollständig, gibt es Ecken $v_1, v_2, v_n \in G$ wie in (i).

Hinweise

2. Simuliere die Outerplanarität durch eine geeignete Modifikation von G.

4. Gehen Sie den Umweg über Minimalgrade.

6. Zum Induktionsschritt vergleiche die Größen $P_G(k)$, $P_{G-e}(k)$ und $P_{G/e}(k)$.

7. (iii) Leicht, wenn G 3-zusammenhängend ist. Falls $\kappa(G - v_n) = 1$, so finde Ecken v_1, v_2 in geeigneten Blöcken von $G - v_n$.