Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

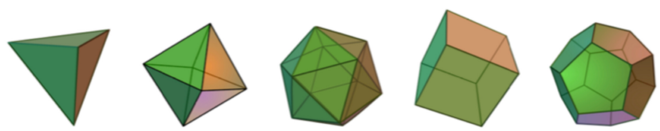
Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 07

1. Führen Sie den Beweis von Korollar D2.3.5 (ii) (E3.3.5 (ii)) genau aus.

2. Es sei G ein r-regulärer ($r \geq 3$) ebener Graph bei dem der Rand eines jeden Gebietes stets die gleiche Anzahl $s \geq 3$ an Ecken enthält. Zeigen Sie, dass G zu einem der unten aufgeführten Graphen isomorph ist. Folgern Sie, dass es genau fünf platonische Körper gibt.



3. Hier ist ein Induktionsbeweis für die Aussage, dass jeder maximal ebene Graph G mit mindestens vier Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Der Induktionsanfang steht mit K^4. Zum Induktionsschritt für Eckenzahlen $n \to n+1$ nehmen wir an, dass jeder maximal ebene Graph G mit n Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Füge nun auf beliebige Weise zu G eine $(n+1)$-te Ecke v hinzu, so dass der erweiterte Graph G' wieder maximal eben ist. Offenbar liegt v in einem Gebiet f von G, und da G' maximal eben ist, ist v zu allen Ecken auf dem Rand von f benachbart (und zu keinen weiteren Ecken). Da G ein ebener Dreiecksgraph ist, sind dies genau drei Ecken, d.h. auch G' ist ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3.

(i) Finden Sie den Fehler im skizzierten Beweis.

(ii) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur behaupteten Aussage und zeigen Sie, weshalb der falsche Beweis dieses Gegenbeispiel übersieht.

4. Ein *Fulleren* ist ein nur aus Kohlenstoffatomen bestehendes Molekül, dessen Atome einen kubischen ebenen Graphen bilden, bei dem jedes Gebiet von einem Fünfeck oder Sechseck berandet ist. Zeige unter Ausnutzung der Fähigkeit von Kohlenstoffatomen zu Doppelbindungen, dass jeder solche Graph theoretisch durch (4-wertige) Kohlenstoffatome realisierbar ist.

5. Ein Fußball ist aus beliebig geformten Fünfecken und Sechsecken so zusammengenäht, dass die Nähte einen kubischen Graphen bilden. Wie viele Fünfecke hat der Fußball?

6^+. Zeigen Sie, dass jeder plättbare Graph so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass alle Kanten Strecken im $\mathbb{R}^2$ sind.

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 21. Mai, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7. Das Ziel der folgenden Schritte ist es einen direkten Beweis für Korollar 3.4.7 zu finden, nur unter Benutzung der Resultate aus §3.2. Zeigen Sie hierfür:

(i) Sei e eine Kante eines maximal ebenen Graphen G, so dass jedes Dreieck von G welches e enthält ein Gebiet ist. Zeigen Sie, dass dann auch der Kontraktionsgraph G/e weiterhin maximal eben ist.

(ii) Zeigen Sie mit einer geeigneten verstärkten Induktionsannahme, dass jeder ebene Dreiecksgraph mit $n \geq 4$ Ecken mindestens eine Kante wie in (i) besitzt.

(iii) Beweisen Sie unter Benutzung von (i) und (ii), dass jeder maximal ebene Graph 3-zusammenhängend ist.

Hinweise

2. Können Sie mithilfe der Eulerformel Ungleichungen für r und s folgern, die nur von endlich vielen natürlichen Zahlen erfüllt werden?

4. Das Ziel ist, durch Verdopplung geeigneter Kanten den gegebenen kubischen Graphen in einen 4-regulären Multigraphen zu verwandeln. Welche Struktur bilden die zu verdoppelnden Kanten? Gibt es dazu Material in einem früheren Kapitel dieses Buchs?

6. Betrachten Sie oBdA einen ebenen Dreiecksgraphen und konstruieren Sie einen dazu passenden geradlinigen ebenen Graphen induktiv, indem Sie zusätzliche sicherstellen, dass zu jedem Zeitpunkt alle Gebiete sternförmig sind.

7. (i) Kanten zählen. (ii) Ermöglicht ein Dreieck C, welches kein Gebietsrand ist, eine Induktion? (iii) Kontrahiere möglichst viele Kanten außerhalb eines 2-Trenners.