Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 6

1. Zeigen Sie, dass der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen stets ein Baum ist.

2. (i) Zeigen Sie, dass für jede Kante e eines 2-zusammenhängenden Graphen $G \neq K^3$ stets $G - e$ oder G/e wiederum 2-zusammenhängend ist. Leiten Sie daraus eine konstruktive Charakterisierung der 2-zusammenhängenden Graphen her, analog zu den Sätzen 2.2.3. und 2.2.5.

(ii) Enthält jeder 2-zusammenhängende Graph $G \neq K^3$ eine Kante e, für die G/e wiederum 2-zusammenhängend ist?

3. Geben Sie einen elementaren[1] Beweis für Korollar 2.3.5. (i) für den Spezialfall, dass eine trennende Eckenmenge genau zwei Ecken enthält.

4. Es sei G ein Graph und $\{x_1P_1, \dots, x_kP_k\}$ bzw. $\{Q_1y_1, \dots, Q_ky_k\}$ Mengen von paarweisen disjunkten Wegen. Zudem gelte $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$ für $1 \leq i, j \leq k$. Zeigen Sie, dass k disjunkte X—Y Wege in G existieren, wobei $X := \{x_1, \dots, x_k\}$ und $Y := \{y_1, \dots, y_k\}$.

5. Formulieren und beweisen Sie eine Version des Mengerschen Satzes für gerichtete Graphen.

Die folgende Aufgabe ist schriftlich (alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen) vor Beginn der Vorlesung am 14. Mai abzugeben:

6. Zeigen Sie, dass in einem k-zusammenhängenden Graphen ($k \geq 2$) je k Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 14. Mai, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7. (i) Es seien G ein Graph und $X, X' \subset V(G)$ zwei inklusions-minimale Eckentrenner. Die Menge X treffe mindestens zwei Komponenten von $G - X'$. Man zeige, dass X' alle Komponenten von $G - X$ trifft, und dass X alle Komponenten von $G - X'$ trifft.

(ii) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme von (i), dass jeder transitive Graph G mit $\kappa(G) = 2$ ein Kreis ist.

[1] D.h. ohne Zuhilfenahme der in der Vorlesung bewiesenen Sätze.

Hinweise

3. Induktion über die Distanz der beiden Ecken.

7. Für (ii): Das Ziel ist es, eine Ecke von Grad 2 zu finden. Betrachte dazu unter allen Eckentrennern der Größe 2 einen Eckentrenner X für den eine Komponente C_1 von $G - X$ minimale Größe hat. Betrachte einen Automorphismus von G, der eine Ecke von X auf eine Ecke in C abbildet. Das Bild X' von X unter diesem Automorphismus ist ein weiterer Eckentrenner von G. Man benutze nun (i) um das folgende Bild rigoros zu begründen, und den Beweis zu vollenden.