Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 5

1$^-$. Finden Sie einen bipartiten Graphen mit Präferenzlisten, für den keine Paarung maximaler Größe stabil ist und keine stabile Paarung maximale Größe hat. Finden Sie einen nicht-bipartiten Graphen mit Präferenzlisten, für den es keine stabile Paarung gibt.

2. Zeigen Sie, dass alle stabilen Paarungen eines Graphen dieselben Ecken überdecken. (Insbesondere haben sie alle dieselbe Mächtigkeit.)

3. Zeige, dass der folgende naheliegende Algorithmus zur Herstellung einer stabilen Paarung in einem bipartiten Graphen nicht nach endlich vielen Schritten enden muss. Beginne mit einer beliebigen Paarung. Ist die aktuelle Paarung nicht maximal, so füge eine Kante hinzu. Ist die aktuelle Paarung maximal aber nicht stabil, so füge eine Kante hinzu, die die Instabilität verursacht (unter Löschung jeglicher alter Paarungskanten an ihren Endecken).

4. Leiten Sie den Satz von König aus dem Satz von Dilworth ab.

5. Zeigen Sie, dass jede Folge von n^2+1 reellen Zahlen eine monotone Teilfolge der Länge $n+1$ enthält. Finden Sie umgekehrt eine Folge der Länge n^2 welche keine monotone Teilfolge der Länge $n+1$ besitzt?

6$^+$. Leiten Sie den Heiratssatz aus dem Satz von Tutte ab.

7$^+$. Beweise den folgenden *Satz von Sperner*: in einer n-elementigen Menge X gibt es höchstens $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ einander paarweise nicht enthaltende Teilmengen.

(Tipp: Offenbar reicht es, eine Überdeckung des Teilmengenverbandes von X durch $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Ketten zu finden.)

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 07. Mai, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

8. Eine quadratische Matrix C ist *doppelt-stochastisch*, wenn alle Zeilen- und alle Spaltensummen 1 ergeben. Sind zusätzlich alle Einträge 0 oder 1, so spricht man auch von einer *Permutationsmatrix*.

Zeigen Sie, dass sich jede doppelt-stochastische Matrix als konvexe Kombination von Permutionsmatrizen schreiben lässt.

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Hinweise

2. Alternierende Wege.

3. Lösen Sie zunächst den zweiten Teil von Aufgabe 1.

4. Richten Sie alle Kanten von A nach B.

5. Hilft ein geeignetes Theorem aus der Vorlesung? Ansonsten Induktion.

6$^+$. Es sei G bipartit mit Eckenpartition $\{A, B\}$ und erfülle die Heiratsbedingung. Reduzieren Sie zuerst auf den Fall $|A| = |B|$. In diesem Fall impliziert die Heiratsbedingung für (A, B) die Heiratsbedingung für (B, A), was nützlich werden könnte.

8. Lösen Sie zuerst das Beispiel

$$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$$

indem Sie nach und nach geeignete Permutationsmatrizen "ausklammern" (unter Beachtung der Konvexität).

Um im allgemeinen Fall eine geeignete Permutationsmatrix zum Ausklammern zu finden, finden Sie mit Hall einen 1-Faktor in einen geeigneten bipartiten Graphen.