Fachbereich Mathematik,	Dozent: Dr. Max Pitz
Universität Hamburg	Tutoren: Carl Bürger,
SoSe 19	Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 4

1. Beweisen oder widerlegen Sie, dass ein zusammenhängender Graph genau dann bipartit ist, wenn es keine zwei benachbarten Ecken gibt, die den gleichen Abstand von einer dritten Ecke haben.

2. Es sei G ein r-regulärer bipartiter Graph mit $r \geq 2$. Zeigen Sie $\kappa(G) \neq 1$.

3. Zeigen Sie, dass ein bipartiter Graph zu jeder Paarung mit weniger als der größtmöglichen Anzahl von Kanten einen Verbesserungsweg enthält. Gilt die Aussage auch in nicht bipartiten Graphen? (Ein *Verbesserungsweg* dort sei ein beliebiger Weg, der zwei nicht gepaarte Ecken verbindet und abwechselnd Kanten innerhalb und außerhalb der gegebenen Paarung enthält.)

4. Beweisen Sie den Heiratssatz mit dem Satz von König.

5. In einem fest vorgegebenen Graphen G konstruieren zwei Spieler gemeinsam schrittweise einen Weg. Ist nach n Spielzügen ein Weg $v_1 \dots v_n$ entstanden, so wählt der am Zug befindliche Spieler eine Ecke v_{n+1}, so dass $v_1 \dots v_{n+1}$ wiederum ein Weg ist. Kann ein Spieler nicht mehr ziehen, so verliert er. Für welche Graphen G hat der erste Spieler eine Gewinnstrategie, für welche der zweite?

Die folgende Aufgabe ist schriftlich (alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen) vor Beginn der Vorlesung am 30. April abzugeben:

6. Zeigen Sie, dass zwei Partitionen einer endlichen Menge in Teilmengen *sämtlich gleicher Mächtigkeit* stets ein gemeinsames Repräsentantensystem[1] haben.

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 30. April, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7$^+$. Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph mit Durchschnittsgrad $\geq f(k)$ einen bipartiten Teilgraphen mit Minimalgrad $\geq k$ hat.

---

[1] Ein Repräsentatensystem einer Partition einer Menge X ist eine Teilmenge $X_0 \subseteq X$, so dass X_0 genau ein Element aus jeder Partitionsklasse enthält.

Hinweise

2. Zählen Sie die Kanten einer geeigneten Komponente von $G - v$ auf zwei verschiedene Weisen.

3. Auf welche Weise überführt ein Verbesserungsweg eine gegebene Paarung in eine größere? Kann man diesen Prozess umkehren, d.h. aus einer gegebenen Paarung und einer größeren einen Verbesserungsweg gewinnen?

4. Wenn es keine Paarung von A gibt, dann genügen nach dem Satz von König wenige Ecken, um alle Kanten zu überdecken. Wie kann uns diese Annahme helfen, um eine große Teilmenge von A zu finden, die wenige Nachbarn hat?

5. Betrachten Sie eine maximale Paarung in G.

6. Benutzen Sie den Heiratssatz.

7. Wie zerlegt man die Eckenmenge eines Graphen G so in zwei Teile A und B, dass der Minimalgrad des aus den A–B-Kanten von G bestehenden bipartiten Graphen H möglichst groß wird?