Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 3

1. Zeigen Sie, dass es genau dann einen 3-regulären Graphen[1] auf n Ecken gibt, wenn n gerade ist und $n > 2$.

2. Zeigen Sie, dass für einen 3-regulären Graphen G stets $\kappa(G) = \lambda(G)$ gilt.

3. Es sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $n \geq 2k + 1$ Ecken und $|E| \geq (2k-1)(n-k)+1$ Kanten einen $(k+1)$-zusammenhängenden Teilgraphen $H \subseteq G$ hat.

4. Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender Graph G mindestens $\Delta = \Delta(G)$ viele Ecken $v_1, \ldots, v_\Delta$ besitzt, so dass $G - v_i$ zusammenhängend ist.

5. Zeige, dass ein Graph genau dann 2-kantenzusammenhängend ist, wenn er eine *stark zusammenhängende* Orientierung hat: eine Orientierung, in der jede Ecke von jeder anderen aus auf einem gerichteten Weg erreichbar ist.[2]

6. Beweise Satz D0.5.1 (E1.5.1).

7. Es sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilbäumen eines Baumes T. Zeigen Sie: Wenn je zwei Bäume aus $\mathcal{T}$ einen nicht-leeren Schnitt haben, so ist auch der Schnitt $\bigcap \mathcal{T}$ aller Bäume aus $\mathcal{T}$ nicht leer.

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 23. April, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

8$^+$. Für $\ell \geq 1$ sei G ein minimal ℓ-kantenzusammenhängender Graph, d.h. G ist ℓ-kantenzusammenhängend, aber $G - e$ ist es nicht mehr, für jede Kante e in G. Zeigen Sie, dass $\delta(G) = \ell$.

[1] Ein Graph heißt r-regulär, falls jede Ecke Grad r hat.

[2] Eine Orientierung eines Graphen legt für jede Kante xy genau eine Richtung fest, entweder von x nach y, oder von y nach x, siehe Kapitel 0.10.

Hinweise

3. Induktion über $|V|$. Wie lassen sich Schritt 1 und 2 in der Idee von Mader's Satz D0.4.3 (E1.4.3) für den Induktionsschritt verwenden?

4. Spannbaum.

5. Normaler Spannbaum.

7. Am einfachsten geht es mit Induktion über $|T|$. Aber eine Induktion über $|\mathcal{T}|$ ist auch möglich.

8. Wir können die Eckenmenge von G so in zwei Teile A, B partitionieren, dass G genau ℓ viele $A-B$-Kanten enthält, also $|E(A,B)| = \ell$. Falls $|A| = 1$, so sind wir fertig (Warum?). Können wir andernfalls einen Schnitt $E(A_1, B_1)$ von G finden mit $|E(A_1, B_1)| = \ell$ und $A_1 \subsetneq A$?

Hierfür lohnt es sich, folgende (oder auch eine ähnliche, auf den Kontext zugeschnittene) Hilfsaussage zu beweisen:

> Sind $E(A, B)$ und $E(C, D)$ zwei Schnitte eines Graphen $G = (V, E)$, so dass $A \cap C \neq \emptyset \neq B \cap D$, so gilt stets:
>
> $$|E(A\cap C, V\setminus(A\cap C))|+|E(B\cap D, V\setminus(B\cap D))| \leq |E(A, B)|+|E(C, D)|.$$