Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Toutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

# Graphentheorie I

## Übungsblatt 2

**1$^-$.** Zeigen Sie, dass 'verbunden sein durch Wege' eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge eines Graphen definiert. Folgern Sie, dass die Eckenmengen der Komponenten eines Graphen eine Partition seiner gesamten Eckenmenge bilden.

**2.** Bestimmen Sie Durchschnittsgrad, Kantenzahl, Durchmesser, Taillenweite, Umfang, Zusammenhang und Kantenzusammenhang von mindestens einem der Graphen $P^n$, $C^n$, $K^n$, $K_{m,n}$, wobei $m, n \geq 3$.

**3.** Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $V := \{0,1\}^d$, d.h. $V$ sei die Menge aller 0–1-Tupel der Länge $d$. Der Graph auf $V$, bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden, heißt *$d$-dimensionaler Würfel*. Bestimmen Sie Durchschnittsgrad, Durchmesser, Taillenweite, Umfang, Zusammenhang und Kantenzusammenhang dieses Graphen.

**4.** Eine *offene Eulertour* ist ein Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält. Charakterisieren Sie diejenigen Graphen, die eine offene Eulertour haben.

**5$^+$.** Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende Graph $G$ einen Weg der Länge $\min\{2\delta(G), |G| - 1\}$ enthält.

Die folgende Aufgabe ist schriftlich (alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen) vor Beginn der Vorlesung am 16. April abzugeben:

**6.** Zeigen Sie, dass ein Graph auf $n$ Ecken, der kein Dreieck als Teilgraphen enthält, höchstens $n^2/4$ Kanten besitzt.

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 16. April, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

**7$^+$.** Zeigen Sie, dass jeder Graph mit Minimalgrad $2k$ einen $(k+1)$-kantenzusammenhängenden Untergraphen hat, für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Toutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

# *Hinweise*

**3.** Tipp zum Umfang: Induktion nach $d$.

**4.** Wie viele Ecken ungerade Grades kann ein solcher Graph höchstens enthalten?

**5.** Betrachte einen längsten Weg $P$ in $G$. Wo liegen die Nachbarn seiner Endecken? Kann $G$ einen Kreis auf $V(P)$ enthalten?

**6.** Induktion über $n$. Betrachten Sie den Graphen der entsteht, indem man zwei benachbarte Ecken löscht.

**7.** Hat $G$ keinen hohen Kantenzusammenhang, so können wir seine Eckenmenge so in zwei Teile $A, B$ partitionieren, dass $G$ nur wenige $A - B$-Kanten[1] enthält. Hat auch $G[A]$ keinen hohen Kantenzusammenhang, so können wir $A$ entsprechend partitionieren, und so weiter. Wieviele Kanten höchstens schicken die so gewonnenen Eckenmengen $A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq \cdots$ jeweils in den gesamten Rest des Graphen, wenn man sie geschickt wählt? Ist die Anzahl dieser Kanten durch eine nur von $k$ abhängige Konstante beschränkt?

[1] Kanten mit einer Endecke in $A$ und der anderen in $B$.