Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 13

1. Finden Sie einen (endlichen) Graph mit Eigenschaft $\mathcal{P}_{1,1}$. Offene Frage: Können Sie auch einen Graphen mit $\mathcal{P}_{i,j}$ für größere i oder j konstruieren? Falls nicht, wie groß muss n sein, damit ein zufälliger Graph in $\mathcal{G}(n, 1/2)$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens 50% die Eigenschaft $\mathcal{P}_{2,2}$ hat?

2. Folgern Sie 9.3.1 aus 9.3.2 indem Sie zeigen, dass ein Graph mit Eigenschaft $\mathcal{P}_{n,n}$ eine isomorphe Kopie eines jeden Graphen H mit $|H| = n + 1$ als Untergraphen (also induzierten Teilgraphen) besitzt.

3. Man zeige mit einem probabilistischen Argument, dass jeder Graph mit m Kanten einen bipartiten Teilgraphem mit mindestens $m/2$ Kanten besitzt.

4. Einen orientierten vollständigen Graphen nennt man ein *Turnier*. Ein orientierter Graph heißt *stark zusammenhängend*, wenn jede Ecke von jeder anderen Ecke durch einen gerichteten Weg erreicht werden kann. Man zeige:

(i) Jedes Turnier hat einen (gerichteten) Hamiltonweg.

(ii) Ein Turnier ist genau dann stark zusammenhängend, wenn es einen (gerichteten) Hamiltonkreis hat.

(iii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Turnier auf der Eckenmenge $\{1, \ldots, n\}$, welches mindestens $\frac{n!}{2^{n-1}}$ gerichtete Hamiltonwege hat.

5. Zeigen Sie, dass jeder eindeutig 3-kantenfärbbare kubische Graph genau drei Hamiltonkreise hat. (Eindeutig soll heißen, dass alle 3-Kantenfärbungen die gleiche Kantenpartition induzieren.)

6$^+$. Man zeige, dass für $p(n) \geq \frac{6\ln(n)}{n}$ die Graphen in $\mathcal{G}(n, p(n))$ fast sicher zusammenhängend sind.

Hinweise

3. Was ist der Erwartungwert der Anzahl der Schnittkanten einer zufälligen Eckenpartition?

4. Bearbeiten Sie zunächst (i) bevor Sie sich an (ii) versuchen. Zu (iii): Was ist der Erwartungwert der Anzahl der Hamiltonwege einer zufälligen Orientierung?

5. Betrachte die Vereinigung zweier Farbklassen.

6. Anleitung: Für $1 \leq \ell \leq n/2$ sei $X_\ell(G)$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G der Größe genau ℓ zählt. Man zeige:

(i) $E(X_\ell) = \binom{n}{\ell} q^{\ell(n-\ell)} \leq n^\ell q^{\ell(n-\ell)} \leq n^{-2}$. Für die letzte Ungleichung lohnt es sich eventuell, den Trick aus der Vorlesung mit q und e^{-p} zu verwenden.

(ii) Was hat die Wahrscheinlichkeit, dass G nicht zusammenhängend ist, mit dem Erwartungswert aus (i) zu tun?